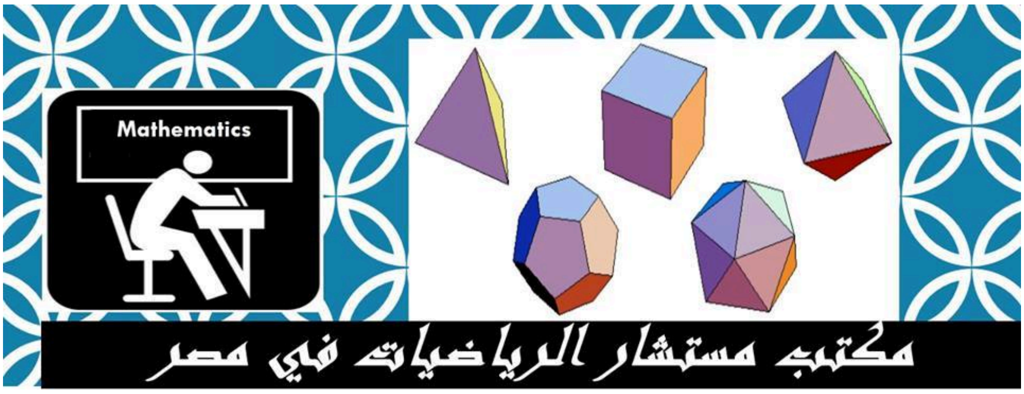
كتاب الطالب

الرياضيات البحتة

التفاضل و التكامل



الصف الثالث الثانوى

الاسم : ____________________

الفصل : ____________________

المدرسة : ____________________

تأليف

أ/ كمال يونس كبشة **أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح**

أ/ سيرافيم إلياس إسكندر

شركة سقارة للنشر

ش.م.م

SAKKARA PUBLISHING

الطبعــة الأولى ٢٠١٦/ ٢٠١٧

رقم الإيـــداع ٨٧٠٣ / ٢٠١٦

الرقم الدولى 978 - 977 - 706 - 031 - 8

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

يشهد عالم اليوم تطورًا علميًّا مستمرًا ، وجيل الغد يلزمه أن يتسلح بأدوات تطور عصر الغد؛ حتى يستطيع مواكبه الانفجار الهائل في العلوم المختلفة، وانطلاقًا من هذا المبدأ سعت وزارة التربية والتعليم إلى تطوير مناهجها عن طريق وضع المتعلم في موضع المستكشف للحقيقة العلمية بالإضافة إلى تدريب الطلاب على البحث العلمى في التفكير؛ لتصبح العقول هى أدوات التفكير العلمى وليست مخازن للحقائق العلمية.

ونحن نقدم هذا الكتاب « التفاضل والتكامل» للصف الثالث الثانوى؛ ليكون أداة مساعدة يستنير بها أبناؤنا على التفكير العلمى، ويحفزهم على البحث والاستكشاف .

وفى ضوء ما سبق روعى فى الكتاب « التفاضل والتكامل » مايلى:

★ تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة، لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة ومخططٌ تنظيمى لها، والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضَّح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان (سوف تتعلم). ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس، وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب، ويتضمن الدرس مجموعة من الأنشطة التى تربطه بالمواد الأخرى والحياة العملية، والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب، وتراعى الفروق الفردية من خلال بند (اكتشف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب)، وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع، كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.

★ كما قُدِّم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات التفكير المتنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان (حاول أن تحل)، وينتهى كل درس ببند «تمارين»، ويشمل مسائل متنوعة، تتناول المفاهيم والمهارات التى درسها الطالب فى الدرس.

★ تنتهى كل وحدة بملخص للوحدة، يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة، وتمارين عامة تشمل مسائل متنوعة على المفاهيم والمهارات التى درسها الطالب فى هذه الوحدة.

★ تُختم وحدات الكتاب باختبار تراكمى، يقيس بعض المهارات اللازمة لتحقيق مخرجات تعلم الوحدة.

★ ينتهى الكتاب باختبارات عامة، تشمل بعض المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

المحتويات

الوحدة الأولى: الاشتقاق وتطبيقاته

الوحدة الثانية: تفاضل وتكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

الوحدة الثالثة: سلوك الدالة ورسم المنحنيات

الوحدة الرابعة: التكامل المحدد وتطبيقاته

الوحدة الأولى

الاشتقاق وتطبيقاته

Differentiation and it's Applications

مقدمة الوحدة

فى دراستك السابقة للدوال، تعرَّفتَ على دوال صريحة فى متغير واحد على الصورة ص = د(س) والعمليات على هذه الدوال وتركيبها، كما بحثتَ قابلية اشتقاق الدالة المتصلة على مجال ما، وأمكنك إيجاد المشتقة الأولى للدوال الجبرية وبعض الدوال المثلثية.

فى هذه الوحدة نستكمل دراسة اشتقاق الدوال المثلثية وتعرُّف دوال أخرى لا يمكن فصل متغيراتها، حيث ترتبط المتغيرات بعلاقة ضمنية أو بتعريفها من خلال متغير وسيط يعرف بالمتغير البارامترى؛ مما يتطلب دراسة أنماط أخرى للاشتقاق، مثل الاشتقاق الضمنى، والاشتقاق البارمترى الذى يعتمد على مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة) فى اشتقاق الدوال، كما نبحث وجود مشتقة مشتقة الدالة (المشتقة الثانية للدالة) فى إطار دراسة المشتقات العليا للدالة والتى تفسح المجال لدراسة تطبيقات حياتية متعددة.

كما تهتم هذه الوحدة ببعض التطبيقات المهمة للاشتقاق فى مجالات متعددة للرياضيات والفيزياء والاقتصاد والعلوم البيولوجية من خلال دراسة معادلتى المماس والعمودى على المماس لمنحنى، والمعدلات الزمنية المرتبطة لتساعدك على نمذجة وحل بعض المشكلات الحياتية التى قد تصادفك.

مخرجات التعلم

فى نهاية الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد مشتقات الدوال المثلثية قاس ، قتا س ، ظتا س.
- يوجد الاشتقاق لدوال ضمنية (صريحة ، ضمنية ، بارامترية ...).
- يوجد المشتقات العليا (الثانية والثالثة) لدوال مختلفة ويتعرف طريقة التعبير عنها .
- يوجد معادلتى المماس والعمودى لمنحنى عند نقطة تقع عليه كتطبيق على الاشتقاق.
- يوجد المعدلات الزمنية المرتبطة متضمنة التطبيقات الفيزيائية.
- ينمذج ويحل مشكلات حياتية واقتصادية.

المصطلحات الأساسية

الاشتقاق (التفاضل)	Differentiation	اشتقاق بارامترى	Parametric Defferentiation
المشتقة الأولى	First Derivative	مشتقات عليا	Higher Derivatives
دالة مثلثية	Trigonometric Function	ميل المماس	Slope of the Tangent
دالة صريحة	Explicit Function	معادلة المماس	Equation of the Tangent
دالة ضمنية	Implicit function	معادلة العمودى	Equation of the Normal
وسيط (بارامتر)	Parameter	معدل	Rate
اشتقاق ضمنى	Implicit Defferentiation	معدلات مرتبطة	Related Rates

دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): اشتقاق الدوال المثلثية

الدرس (١ - ٢): الاشتقاق الضمنى والبارامترى

الدرس (١ - ٣): المشتقات العليا للدالة

الدرس (١ - ٤): معادلتى المماس والعمودى لمنحنى

الدرس (١ - ٥): المعدلات الزمنية المرتبطة

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة رسومية
- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية (Geogebra, Graph)

مخطط تنظيمى للوحدة

الاشتقاق وتطبيقاته

- الاشتقاق
  - مشتقات الدوال المثلثية
  - الاشتقاق الضمنى
  - الاشتقاق البارامترى
  - المشتقات المتتالية
- تطبيقات الاشتقاق
  - معادلتى المماس والعمودى لمنحنى
  - معدلات زمنية مرتبطة
  - تطبيقات
    - بيولوجية
    - فيزيائية
    - هندسية

١ - ١ اشتقاق الدوال المثلثية

Derivative of Trigonometric Functions

سوف تتعلم

إيجاد مشتقة:

- د(س) = ظتا س
- د(س) = قا س
- د(س) = قتا س

المصطلحات الأساسية

- دالة مثلثية Trigonometric function
- مشتقة Drivative
- ظتا س cot(x)
- قا س Sec(x)
- قتا س Csc(x)

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

د(س)	د/(س)
أ (أ ∈ ح)	صفر
سⁿ (ن ∈ ح)	ن س ن-١
جا س (سى)	جتا س
جتا س (سى)	- جا س
ظا س (سى)	قا٢ س

مقدمة:

سبق لك دراسة اشتقاق بعض الدوال المثلثية، وفى هذا الدرس سنذكرك ببعض المفاهيم الأساسية فى الاشتقاق لتتعرف مشتقات دوال مثلثية أخرى.

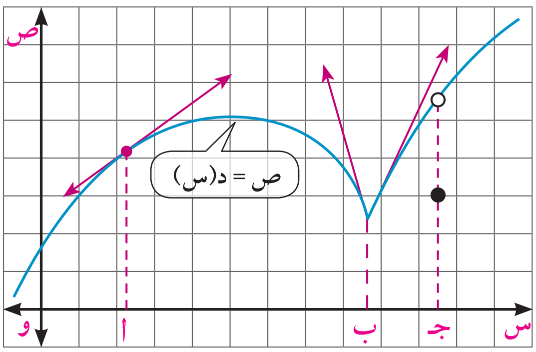
فكر و ناقش

تعلم أن معدل تغير الدالة د عند النقطة (أ ، د(أ)) = نهـــا هـ←٠ $\frac{\text{د(أ + هـ) - د(أ)}}{\text{هـ}}$ بشرط أن تكون النهاية موجودة، وهو أيضًا مشتق الدالة د عند نفس النقطة، ويُرمز له بالرمز د/ (أ) ويكون ميل المماس لمنحنى د عند النقطة (أ، د(أ)) = د/ (أ)

من قراءتك البيانية للشكل المقابل ناقش قابلية الدالة د للاشتقاق عند:

س = حـ ، س = أ ، س = ب ،

س ∈]أ ، ب[، س ∈]أ ، ب[



لاحظ أن :

ميل المماس معروف لجميع نقط المنحنى باستثناء عند س = ب ، س = جـ وعلى ذلك فإن:

١- الدالة د غير متصلة عند س = جـ فهى غير قابلة للاشتقاق عند جـ

٢- الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ لأن د/ (أ) موجودة

٣- الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = ب لأن :

المشتقة اليمنى د/(ب⁺) ≠ المشتقة اليسرى د(ب⁻)

٤- تكون الدالة د قابلة للاشتقاق على الفترة]أ ، ب[إذا وجدت مشتقة للدالة عند كل نقطة تنتمى إلى هذه الفترة.

٥- تكون الدالة د المعرفة على الفترة المغلقة [أ ، ب] قابلة للاشتقاق إذا وفقط إذا كان كل من د/(أ⁺) ، د/(ب⁻) له وجود، وكانت د قابلة للاشتقاق على الفترة]أ ، ب[

تذكر : قواعد الاشتقاق

١- $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ [أ د(س)] = أ د/(س) ، أ ∈ ح

٢- $\frac{ء}{ء س}[د(س) \pm ر(س)] = د'(س) \pm ر'(س)$

٣- $\frac{ء}{ء س}[د(س) \times ر(س)] = د(س) \bullet ر'(س) + ر(س) \bullet د'(س)$

٤- $\frac{ء}{ء س}[\frac{د(س)}{ر(س)}] = \frac{ر(س) \bullet د'(س) - د(س) \bullet ر'(س)}{[ر(س)]^{٢}}$ ، ر (س) $\neq$ ٠

إذا كانت ص = د(ع) قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى ع، ع = ر (س) قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ،

فإن ص = د [ر (س)] تكون قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

ويكون : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ء ص}{ء ع} \times \frac{ء ع}{ء س}$ [قاعدة السلسلة]

أي إن : $\frac{ء}{ء س}$ د [ر(س)] = د' [ر(س)] • ر'(س)

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ، ن عددًا حقيقيًّا

فإن : $\frac{ء}{ء س}[د(س)]^{ن} = ن [د(س)]^{ن-١} \times د'(س)$

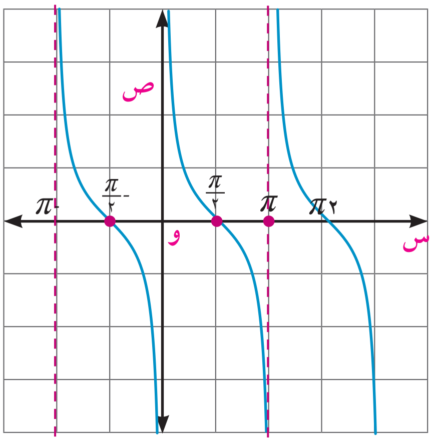
أي إن إذا كانت ص = د(س) **فإن** $\boxed{\frac{ء}{ء س}(ص)^{ن} = ن ص^{ن-١} \frac{ء ص}{ء س}}$

تعلم

١ - مشتقة دالة ظل التمام

إذا كانت ص = ظتا س حيث س ∈ ع ، س $\neq$ نπ، ن ∈ صـ

فإن : $\frac{ء}{ء س}$ (ظتا س) = - قتا^{٢} س



ص = ظتا س

لاحظ أن :

$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ء}{ء س}(\frac{١}{ظا س}) = \frac{ء}{ء س}[\frac{جتا س}{جا س}]$

$= \frac{جا س \times - جا س - جتا س \times جتا س}{(جا س)^{٢}} = - \frac{١}{(جاس)^{٢}} = -$ قتا^{٢} س

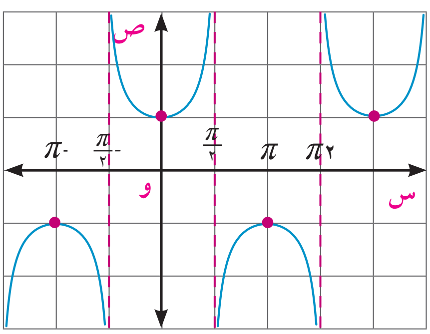
٢ - مشتقة دالة القاطع

إذا كانت ص = قا س حيث :

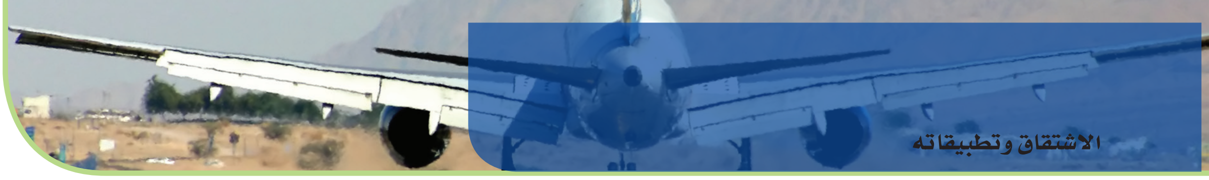
س∈ ع ، س $\neq \frac{(٢ن + ١)\pi}{٢}$ ، ن ∈ صـ

فإن:

$\frac{ء}{ء س}$ (قاس) = قا س ظا س (تحقق من ذلك)



ص = قا س



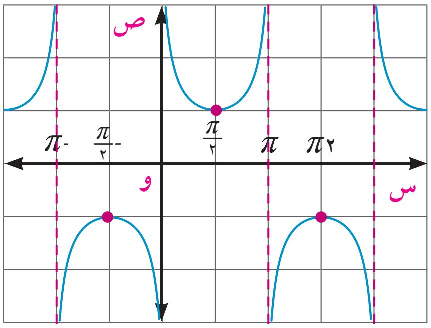
٣ - مشتقة دالة قاطع التمام :

إذا كانت ص = قتا س حيث

س ∈ ع ، س ≠ ن π ، ن ∈ صـ

فإن : $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (قتا س) = - قتا س ظتا س

تحقق من ذلك



ص = قتا س

مثال

١ أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ لكل مما يأتي:

أ ص = ٣ س^{٥} + ٤ ظتا س

ب ص = ٣ قا س - ٥ ظا س

جـ ص = س^{٣} قتا س

د ص = $\frac{\text{١ - ظتا س}}{\text{١ + ظتا س}}$

الحل

أ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٣ × ٥س^{٤} + ٤ (- قتا^{٢} س) = ١٥ س^{٤} - ٤ قتا^{٢}س

ب $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٣ (قا س ظا س) - ٥ قا^{٢}س = قاس [٣ ظا س - ٥ قا س]

جـ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٣ س^{٢} قتا س + س^{٣} (- قتا س ظتا س) = س^{٢} قتاس [٣ - س ظتا س]

د $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{\text{(١ + ظتا س) (قتا}^{٢}\text{س) - (١ - ظتاس) (- قتا}^{٢}\text{س)}}{\text{(١ + ظتا س)}^{٢}}$

= $\frac{\text{قتا}^{٢}\text{س[١ + ظتا س + ١ - ظتا س]}}{\text{(١ + ظتا س)}^{٢}}$ = $\frac{\text{٢ قتا}^{٢}\text{ س}}{\text{(١ + ظتا س)}^{٢}}$

حاول أن تحل

١ أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ إذا كانت ص تساوى:

أ ٢ جا س - ٣ ظتا س

ب جتا س + ٤ قا س

جـ قا س ظا س

د قتا س ظتا س

هـ $\frac{\text{قا س}}{\text{١ + قا س}}$

و $\frac{\text{١ - قتا س}}{\text{١ + قتا س}}$

مثال

٢ أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ لكل مما يأتي:

أ ص = قا (٥ س + ٢)

ب ص = ظتا (جتا ٣ س)

جـ ص = قتا^{٢} (١ + ٣س^{٢})

د ص = (٣ - ٢ ظتا س)^{٣}

الحل

أ ∵ ص = قا (٥ س + ٢) بوضع ع = ٥ س + ٢ ∴ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = ٥

ويكون ص = قا ع حيث $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ = قا ع ظا ع

∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ [قاعدة السلسلة]

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قاع ظا ع × ٥ = ٥ قا (٥ س + ٢) ظا (٥ س + ٢)

حل آخر:

∵ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ د[ر(س)] = دَ[ر(س)] × رَ(س)

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا(٥ س + ٢) ظا (٥ س + ٢) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (٥ س + ٢)

= ٥ قا (٥ س + ٢) ظا (٥ س + ٢)

ب ص = ظتا (جتا ٣ س)

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = - قتا^{٢}(جتا ٣ س) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (جتا ٣ س)

= - قتا^{٢} (جتا ٣ س) × [- جا ٣ س × ٣] = ٣ جا ٣ س قتا^{٢} (جتا ٣ س)

ج ص = قتا^{٢} (١ + ٣س^{٢})

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ قتا (١ + ٣س^{٢}) × - قتا (١ + ٣س^{٢}) ظتا (١ + ٣ س^{٢}) × ٦ س

= - ١٢س ظتا (١ + ٣س^{٢}) قتا^{٢} (١ + ٣ س^{٢})

د ص = (٣ - ٢ ظتا س)^{٣}

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ (٣ - ٢ ظتا س)^{٢} × - ٢ (- قتا^{٢} س) = ٦ قتا^{٢} س (٣ - ٢ ظتا س)^{٢}

حاول أن تحل

٢ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا كانت ص تساوي:

أ ظتا (س^{٢} + ٣) ب قا $\sqrt{\text{س - ٢}}$ ج جا (قتا ٣ س^{٢})

د ٣ قا ٢ س + ٢ قتا ٣ س هـ - قتا^{٣} (٢ س + π) و س^{٢} قا $\frac{١}{\text{س}}$

تمارين الدرس (١ - ١)

إذا كانت د ، ر ، ق دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س، أكمل ما يأتي:
باستخدام القيم المعطاه فى الجدول المقابل:

س	١	٢
د(س)	١-	٤
ر(س)	٢	١
د´(س)	١	٥
ر´(س)	٢	٣-

(١) ق (س) = ٣ د(س) - ٢ ر(س) فإن ق´(١) = ...

(٢) ق (س) = د(س) [٥ + ر (س)] فإن ق´(٢) = ...

(٣) ق (س) = د(س) ÷ [ر (س) + ٢] فإن ق´(١) = ...

(٤) ق (س) = د[ر (س)] فإن ق´(١) = ...

(٥) ق (س) = ر [٣ س - د(س)] فإن ق´(٢) = ...

(٦) ق (س) = [س^{٣} + ر (س)]$^{-٢}$ فإن ق´(١) = ...

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتي:

(٧) ص = س^{٣} - ٢ قا س

(٨) ص = قتا (٢ - ٣س)

(٩) ص = ظتا (π - $\frac{١}{س}$)

(١٠) ص = ظا (ظتا س)

(١١) ص = (١ + ظتا س)^{٢}

(١٢) ص = قتا (π - ٢س)

(١٣) ص = جتا ٢ س - ٥ ظتا ٣ س

(١٤) ص = طا ٣ س - قتا ٢ س

(١٥) ص = جا^{٢} ٣س + قا^{٢} س .

(١٦) ص = قا س طا ٢ س

(١٧) ص = ظتا^{٣} $\sqrt{س}$

(١٨) ص = قتا^{٢} (١ + س^{٢})

(١٩) ص = ٣قا^{٢} (٢ س + π)

(٢٠) ص = $\sqrt{١ + قا س}$

(٢١) ص = س^{٢} ظتا ٣ س

(٢٢) ص = (قتا س + ظتا س)$^{-١}$

(٢٣) ص = $\frac{ظتا ٣ س}{٢ س + ٣}$

(٢٤) ص = $\frac{١ - قا س}{١ + قا س}$

أجب عمّا يأتي:

(٢٥) إذا كانت ص = ظتا $\frac{\pi}{٦}$ ع ، ع = ٣ $\sqrt{س}$ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ١

(٢٦) إذا كانت ص = $\sqrt{٥ - ٢ع}$ ، ع = قا ٢ س أثبت أن $\sqrt{٣}$ $\frac{ءص}{ءس}$ + ١٢ = ٠ عند س = $\frac{\pi}{٦}$

(٢٧) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) لكل مما يأتي:

أ) ص = ٢ ظتا س + $\sqrt{٢}$ قا س عند س = $\frac{\pi}{٤}$

ب) ص = ٣ طا س - قتا^{٢} س عند س = $\frac{٣\pi}{٤}$

الاشتقاق الضمنى والبارامترى

Implicit and Parametric Defferentiation

سوف تتعلم

- الاشتقاق الضمنى
- الاشتقاق البارامترى

المصطلحات الأساسية

- علاقة *Relation*
- دالة صريحة *Explicit function*
- دالة ضمنية *Implicit function*
- وسيط *Parameter*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية. *Scientific calculator*

الاشتقاق الضمنى *Implicit Defferentiation*

سبق لك إيجاد مشتقة دالة معرفة بالصورة ص = د(س) وهى دالة صريحة explicit function للمتغير المستقل س حيث تحدد قيمة ص مباشرة متى علم قيمة س مثل :

$ص = ٤س^{٣} - ٥س + ٢$ ، ص = جا (٢ س + ٣) ، $ص = \frac{س + ١}{س - ١}$ ، ...

ويكون $ص^{\prime} = ١٢ س^{٢} - ٥$ ، $ص^{\prime} = ٢$ جتا (٢ س + ٣) ، $ص^{\prime} =$ ....

أما إذا كانت ص مرتبطة بالمتغير س بمعادلة تحوى س ، ص معًا مثل:

س ص + ص - ٤ = ٠ (١) ، $س^{٢} + ص^{٢} - ٩ = ٠$ (٢)

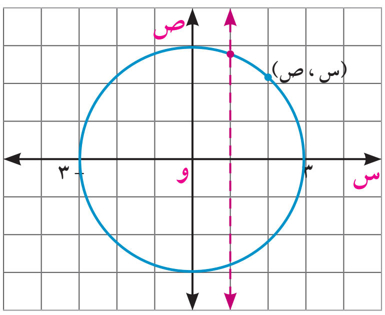
فكل معادلة تعرف علاقة ضمنية implicit relation بين س ، ص؛ تعبر عن العلاقة بين إحداثيي نقطة (س ، ص) واقعة على منحناها البياني.

لاحظ أن :

١- يمكن كتابة المعادلة س ص + ص - ٤ = ٠ بالصورة:

ص (س + ١) = ٤ ∴ $ص = \frac{٤}{س + ١}$ حيث س ≠ -١

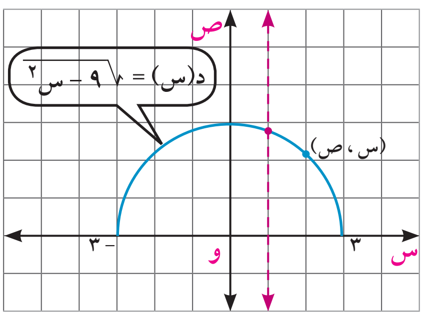
وفى هذه الحالة تعرف العلاقة الضمنية دالة واحدة صريحة.

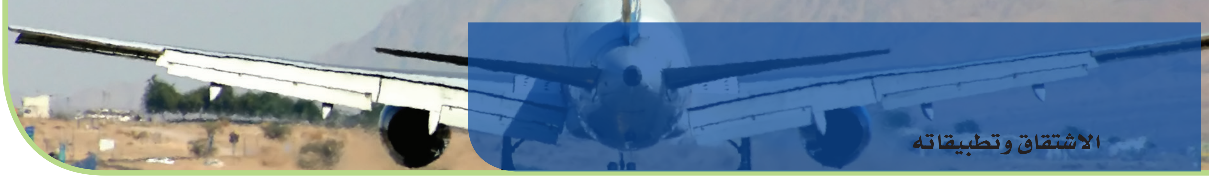


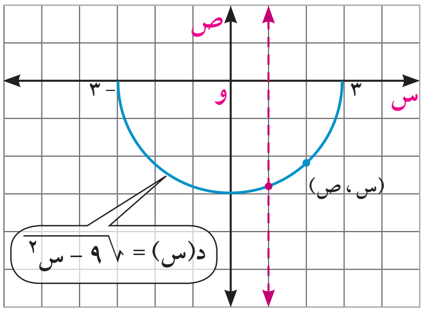
٢- مجموعة النقط (س ، ص) التى تحقق المعادلة $س^{٢} + ص^{٢} = ٩$ ترسم دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٣ وحدات، ومن اختبار الخط الرأسى نلاحظ أن العلاقة $س^{٢} + ص^{٢} = ٩$ لا تمثل دالة غير أن $ص^{٢} = ٩ - س^{٢}$

∴ $ص = \pm \sqrt{٩ - س^{٢}}$

فيمكن أن تعرِفُ العلاقة الضمنية $س^{٢} + ص^{٢} = ٩$ دالتين صريحتين الأولى $ص = \sqrt{٩ - س^{٢}}$ مجالها [-٣ ، ٣] ومداها [٠ ، ٣] وقابلة للاشتقاق لكل س ∈]-٣ ، ٣[







والثانية : ص = $-\sqrt{٩ - س^٢}$

مجالها [-٣، ٣] ومداها [-٣، ٠]

وقابلة للاشتقاق لكل س∈]-٣ ، ٣[

فى كثير من المعادلات على الصورة د(س ، ص) = ٠ يصعب التعبير عن ص بدلالة س مباشرة؛ لأن المتغير ص لا يمثل دالة صريحة بالنسبة إلى س ، تسمى هذه الدالة غير الصريحة بالدالة الضمنية implicit function

عملية اشتقاق الدالة الضمنية (الاشتقاق الضمنى) يتطلب اشتقاق كل من طرفى المعادلة بالنسبة إلى أحد المتغيرين س أو ص وفقًا لقاعدة السلسلة لتحصل على $\frac{ءص}{ءس}$ أو $\frac{ءس}{ءص}$ على الترتيب.

مثال

١ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان:

أ $س^٣ + ص^٢ - ٧س + ٥ص = ٨$ ب $٣ س ص + ص^٢ = س^٢ - ٧$

الحل

أ لاحظ أن المعادلة لا تعطى ص صراحة بدلالة س، لإيجاد $\frac{ءص}{ءس}$ نشتق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س مع مراعاة أن ص دالة للمتغير س وقابلة للاشتقاق فيكون:

$$٣س^٢ + ٢ص \frac{ءص}{ءس} - ٧ + ٥ \frac{ءص}{ءس} = ٠$$

$$\frac{ءص}{ءس}(٢ص + ٥) = ٧ - ٣س^٢ \qquad \therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٧ - ٣س^٢}{٢ص + ٥}$$

تذكر أن

إذا كانت ص دالة فى س وقابلة للاشتقاق فإن:

$\frac{ء}{ءس}(ص)^ن = ن ص^{ن-١} \frac{ءص}{ءس}$

ب $\because ٣ س ص + ص^٢ = س^٢ - ٧$ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س.

$$\therefore \frac{ء}{ءس}(٣س ص) + ٢ص \frac{ءص}{ءس} = ٢س$$

$$٣س \frac{ءص}{ءس} + ص \times ٣ + ٢ص \frac{ءص}{ءس} = ٢س$$

$$\frac{ءص}{ءس}[٣س + ٢ص] = ٢س - ٣ص \qquad \therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢س - ٣ص}{٣س + ٢ص}$$

حاول أن تحل

١ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان:

أ $س^٣ - ٥ س ص + ص^٣ = ٤س$ ب $س^٢ص + ص^٢س = ٢٥$

مثال

٢ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان:

أ جا ٢ ص = ص جتا ٣ س ب ظا٢ س + ظتا ص = س ص

الحل

أ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{ى}{ى س}$ (جا ٢ ص) = $\frac{ى}{ى س}$ (ص جتا ٣ س)

جتا ٢ ص × ٢ $\frac{ى ص}{ى س}$ = ص [- جا ٣ س × ٣] + جتا ٣ س [$\frac{ى ص}{ى س}$]

$\frac{ى ص}{ى س}$ [٢ جتا ٢ ص - جتا ٣ س] = - ٣ ص جا ٣ س $\therefore \frac{ى ص}{ى س} = \frac{\text{٣ ص جا ٣ س}}{\text{جتا ٣ س - ٢ جتا ٢ ص}}$

ب باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

$\frac{ى}{ى س}$ (طا ٢ س) + $\frac{ى}{ى س}$ (ظتا ص) = $\frac{ى}{ى س}$ (س ص)

٢ قا^{٢} ٢ س - قتا^{٢} ص $\frac{ى ص}{ى س}$ = س $\frac{ى ص}{ى س}$ + ص

$\frac{ى ص}{ى س}$ [س + قتا^{٢}ص] = ٢قا^{٢} ٢ س - ص $\therefore \frac{ى ص}{ى س} = \frac{\text{٢قا}^{٢}\text{ ٢ س - ص}}{\text{س + قتا}^{٢}\text{ص}}$

حاول أن تحل

٢ أوجد $\frac{ى ص}{ى س}$ إذا كان:

أ س جتا ص + ص جتا س = ١ ب ٣ ص = جا س جتا ٢ ص

لاحظ أن: الصيغة النهائية للمشتقة $\frac{ى ص}{ى س}$ فى الاشتقاق الضمنى تحوى كلًّا من س ، ص مما يجعل حسابها شاقًّا عند إحدى قيم س لحاجتنا أولاً لمعرفة قيمة ص المناظرة لها والتى يصعب تحديدها من العلاقة الضمنية.

الاشتقاق البارامترى *Parametric Defferentiation*

إذا أمكن التعبير عن كل من الإحداثى السينى ، والاحداثى الصادى للنقطة (س ، ص) كدالة فى متغير ثالث ن (يسمى الوسيط أو البارامتر) بالمعادلتين:

س = د(ن) ، ص = ر(ن) حيث د ، ر لهما نفس المجال

فإن المعادلتين معًا تمثلان معادلة لمنحنى واحد معبرًا عنه بالصورة البارامترية

تعلم

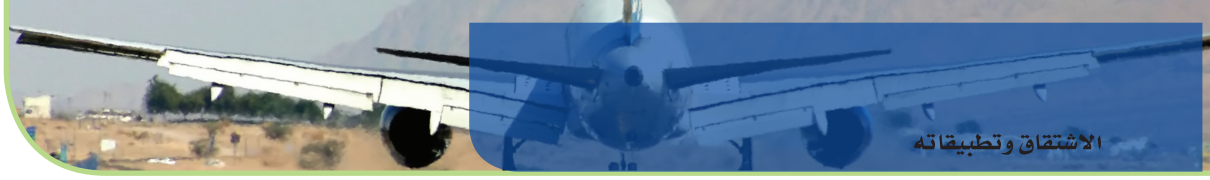
للمنحنى المعطى على الصورة البارامترية س = د(ن) ، ص = ر(ن)

يكون $\frac{ى ص}{ى س} = \frac{ى ص}{ى ن} \times \frac{ى ن}{ى س} = \frac{ى ص}{ى ن} \div \frac{ى س}{ى ن}$ حيث د ، ر دالتان قابلتان للاشتقاق بالنسبة إلى ن.

مثال

٣ أوجد $\frac{ى ص}{ى س}$ للمنحنيات الآتية عند القيم المعطاة:

أ س = ٥ ن + ٣ ، ص = ١٦ ن^{٢} + ٩ ، ن = ٥ ب س = ٣ جتا ٢θ ، ص = ٤ جا ٣θ ، $\theta = \frac{\pi}{٤}$



الحل

أ $\text{س} = ٥\text{ن} + ٣$ ، $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٥$ ، $\text{ص} = ١٦\text{ن}^٢ + ٩$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٣٢\text{ن}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}} = \frac{٣٢\text{ن}}{٥}$ ويكون $\left[\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right]_{\text{ن}=٥} = ٣٢$

ب $\text{س} = ٣ \text{ جتا } ٢\theta$ ، $\frac{\text{دس}}{\text{د}\theta} = ٣ \times -\text{جا } ٢\theta \times ٢ = -٦ \text{ جا } ٢\theta$

$\text{ص} = ٤ \text{ جا } ٣\theta$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{د}\theta} = ٤ \times \text{جتا } ٣\theta \times ٣ = ١٢ \text{ جتا } ٣\theta$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{د}\theta} \times \frac{\text{د}\theta}{\text{دس}} = \frac{١٢ \text{ جتا } ٣\theta}{-٦ \text{ جا } ٢\theta} = \frac{-٢ \text{ جتا } ٣\theta}{\text{جا } ٢\theta}$

عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٢ \text{ جتا } \frac{٣\pi}{٤}}{\text{جا } \frac{\pi}{٢}} = -٢ \times \frac{-١}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}$

حاول أن تحل

٣ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ للمنحنيات الآتية عند القيم المعطاة

أ $\text{س} = (\text{ن} + ٧)(\text{ن} - ٢)$ ، $\text{ص} = (\text{ن}^٢ + ١)(\text{ن} - ٢)$ ، $\text{ن} = ١$.

ب $\text{س} = \text{قا}^٢\theta - ١$ ، $\text{ص} = \text{ظا}\theta$ ، $\theta = \frac{-٣\pi}{٤}$ جـ $\text{س} = \sqrt{٣\text{ن} - ٢}$ ، $\text{ص} = \sqrt{٤\text{ن} + ١}$ ، $\text{ن} = ٢$

تفكير ناقد: أوجد قيمة البارامتر ع التي يكون عندها للمنحنى

$\text{س} = ٢\text{ع}^٣ - ٥\text{ع}^٢ - ٤\text{ع} + ١٢$ ، $\text{ص} = ٢\text{ع}^٢ + \text{ع} - ٤$ مماس أفقي وآخر رأسي.

مثال

٤ أوجد مشتقة $(٤\text{س}^٣ - ٩\text{س}^٢ + ٥)$ بالنسبة إلى $(٣\text{س}^٢ + ٧)$

الحل

بوضع $\text{ص} = ٤\text{س}^٣ - ٩\text{س}^٢ + ٥$ ، $\text{ع} = ٣\text{س}^٢ + ٧$ فتكون $\text{ص} = \text{د(س)}$، $\text{ع} = \text{ر(س)}$

الدالتان د، ر قابلتان للاشتقاق بالنسبة إلى س باعتبار س بارامتر لكل من المتغيرين ص ، ع

∴ من الاشتقاق البارامترى نجد أن:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص}'}{\text{ع}'} = \frac{١٢\text{س}^٢ - ١٨\text{س}}{٦\text{س}} = ٢\text{س} - ٣$ أى أن $\frac{\text{د}}{\text{د}(٣\text{س}^٢ + ٧)}[٤\text{س}^٣ - ٩\text{س}^٢ + ٥] = ٢\text{س} - ٣$

حاول أن تحل

٤ باستخدام الاشتقاق البارامترى أوجد:

أ مشتقة $\text{س}^٢ + ١$ بالنسبة إلى $\sqrt{\text{س}^٢ - ١}$

ب مشتقة $\sqrt{٨ + \text{س}^٢}$ بالنسبة إلى $\frac{\text{س}}{\text{س} + ١}$ عند $\text{س} = ١$

جـ مشتقة س - جا س بالنسبة إلى ١ - جتا س عند $\text{س} = \frac{\pi}{٣}$

تمـــارين الدرس (١ - ٢)

أولًا: أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كانت $س^٢ + ص^٢ = ١$ فإن $\frac{ءص}{ءس}$ يساوى:

أ) س ب) $\frac{١}{ص}$ جـ) $-\frac{س}{ص}$ د) $-\frac{ص}{س}$

(٢) إذا كانت $س^٢ + ص^٢ = ٢ س ص$ فإن $\frac{ءص}{ءس}$ يساوى:

أ) -١ ب) صفر جـ) ١ د) ٢

(٣) إذا كانت $ص^٢ - ٢\sqrt{س} = ٠$ فإن $\frac{ءص}{ءس}$ يساوى:

أ) $\frac{٢ص}{\sqrt{س}}$ ب) $\sqrt{س}$ جـ) $\frac{س}{ص^٣}$ د) $\frac{١}{ص^٣}$

(٤) إذا كان $س = ٢ن^٢ + ٣$ ، $ص = \sqrt{ن^٣}$ ، $ن = ١$ فإن $\frac{ءص}{ءس}$ يساوى:

أ) $\frac{٣}{٨}$ ب) $\frac{٣}{٤}$ جـ) ٢ د) ٦

(٥) ميل المماس للمنحنى $س ص^٢ = ٣$ عند النقطة (٣ ، ١) يساوى:

أ) -٣ ب) $-\frac{١}{٦}$ جـ) $\frac{١}{٣}$ د) $\frac{٣}{٢}$

ثانيًا: أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ في كل مما يأتى:

(٦) $س^٢ - ٤ص^٢ + ٧ = ٠$ (٧) $س^٤ + ٣ص^٤ - ٢ = ٠$ (٨) $س^٢ - ٢ س ص = ٥ - ص^٢$

(٩) $س^٣ + ٦ س ص = ٤ ص + ٣$ (١٠) $\frac{س}{ص} + \frac{ص}{س} = ١$ (١١) س ص + جا ص = ٥

(١٢) س جا ص + ص جتا س = ٠ (١٣) س قتا ص = ص ظتا س (١٤) $س^٢$ جا ص - $ص^٢$ جا س = ٩

(١٥) جا٢ س جتا ٢ ص = $\frac{٣}{٤}$

ثالثًا: أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ للمنحنيات الآتية عند القيم المعطاة:

(١٦) $س = ١٣ - ٢ ن$ ، $ص = ٤ ن^٢ - \sqrt{ن}$ ، $ن = ٤$

(١٧) س = جا $٢ \pi \theta$ ، ص = جتا $٢ \pi \theta$ ، $\theta = \frac{١}{٦}$

(١٨) $س = ٥ + قا^٢ ٣ \theta$ ، ص = ١ - ظا ٣θ ، $\theta = \frac{\pi}{٤}$

(١٩) أوجد ميل المماس للمنحنى جتا $\sqrt{\pi ص} = ٣ س + ١$ عند النقطة $(-\frac{١}{٣} ، \frac{\pi}{٤})$

(٢٠) أوجد مشتقة $\frac{س + ١}{س - ١}$ بالنسبة إلى $\sqrt{٢ س + ١}$ عند س = ٤

(٢١) أوجد قيمة البارامتر ن التى عندها يكون للمنحنى $س = ٢ن^٣ - ٥ن^٢ + ٤ ن - ٩$ ، $ص = ٢ن^٢ + ن - ٥$

أ) مماس رأسى. ب) مماس أفقى.

١ - ٣ المشتقات العليا للدالة

Higher Derivatives of a Function

سوف تتعلم

- إيجاد مشتقات ذات رتب أعلى لدالة.

المصطلحات الأساسية

- رتبة *Order*
- مشتقة *Derivative*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية. *Scientific calculator*

فكر و ناقش

إذا كانت $ص = د(س)$ حيث $ص = س^٤ + ٥س^٣ - ٢س + ٣$ أوجد مشتقة الدالة د،

هل يمكنك تكرار عملية الاشتقاق بالنسبة إلى س ؟ لماذا؟

هل تتوقف عملية الاشتقاق؟ فسر إجابتك.

تعلم

المشتقات ذات الرتب العليا *(Higher - Order Derivative)*

- **إذا كانت** $ص = د(س)$ حيث د دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فإن مشتقتها الأولى (First derivative) هي $ص' = \frac{ءص}{ءس} = د'(س)$ وتمثل دالة جديدة.
- **وإذا كانت** المشتقة الأولى قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فإن مشتقتها $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{ءص}{ءس}\right)$ تسمى المشتقة الثانية (Second Derivative) للدالة د وتمثل دالة أخرى ويُرمز لها بالرمز $ص'' = \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = د''(س)$
- بتكرار عملية الاشتقاق نحصل على المشتقة الثالثة (Third Derivative) للدالة د ونرمز لها بالرمز $\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ ، ... وهكذا

تسمى المشتقات لدالة بدءًا من المشتقة الثانية بالمشتقات العليا، وتكتب المشتقة من الرتبة ن كما يلي :

$$ص^{(ن)} = \frac{ء^نص}{ءس^ن} = د^{(ن)}(س) \quad \text{حيث ن عدد صحيح موجب}$$

لاحظ أن :

١- $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ تقرأ دال اثنين ص دال س اثنين

٢- يوجد اختلاف بين $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ ، $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢$ فالأولى تدل على المشتقة الثانية للدالة بينما الثانية تدل على مربع المشتقة الأولى.

مثال

(١) أوجد المشتقة الثانية لكل من:

أ) $ص = ٢س^٤ + ٣س - ٥$

ب) $ص = \frac{س + ١}{س - ١}$

ج ص = جا (٣ س - ٢)

د ص = $\sqrt{٣ س - ٢}$

الحل

أ ∵ ص = ٢س^٤ + ٣س^٣ - ٥ ، س ∈ ع ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٨س^٣ + ٣ ، $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ٢٤ س^٢

ب ∵ ص = $\frac{س + ١}{س - ١}$ ، س ≠ ١ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{س - ١ - (س + ١)}{(س - ١)^٢}$ = $\frac{-٢}{(س - ١)^٢}$ ، س ≠ ١

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = $\frac{ء}{ءس}$ [-٢ (س - ١)$^{-٢}$] = $\frac{٤}{(س - ١)^٣}$ ، س ≠ ١

ج ∵ ص = جا (٣س - ٢) ، س ∈ ع ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ جتا (٣ س - ٢) ، $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = -٩ جا (٣س - ٢)

د ∵ ص = $\sqrt{٣ س - ٢}$ ، س ⩾ $\frac{٢}{٣}$ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٣}{٢\sqrt{٣س - ٢}}$ ، س > $\frac{٢}{٣}$

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = $\frac{ء}{ءس}$ [$\frac{٣}{٢}$ (٣س - ٢)$^{-\frac{١}{٢}}$] = - $\frac{٩}{٤\sqrt{(٣س - ٢)^٣}}$ ، س > $\frac{٢}{٣}$

حاول أن تحل

١ أوجد المشتقة الثالثة لكل من:

أ ص = س^٤ - ٢ س^٢ + ٥

ب ع = (٢ ن - ١)^٤

ج د(س) = جتا (٢ س + π)

د د(س) = $\frac{س}{س - ١}$

تفكير ناقد: إذا كانت ص = جا أ س استكشف نمط الاشتقاق المتتالى، أوجد ص$^{(٢٥)}$

مثال

٢ إذا كانت ص^٢ + ٢ س ص = ٨ أثبت أن : (س + ص) $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ٢ $\frac{ءص}{ءس}$ + $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢$ = صفر

الحل

أ ∵ ص^٢ + ٢ س ص = ٨ ، **باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س**

∴ ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢س $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ص = ٠ **بالقسمة على ٢**

(س + ص) $\frac{ءص}{ءس}$ + ص = ٠ **باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س**

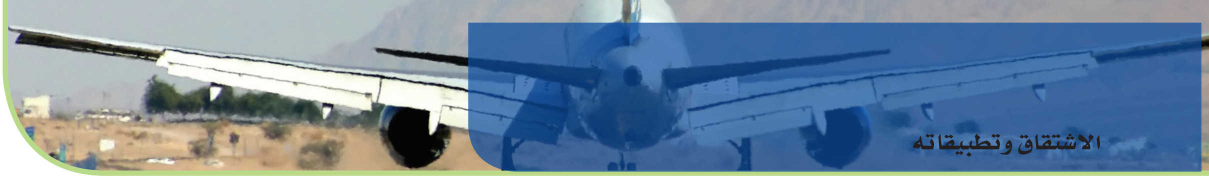
∴ (س + ص) $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + $\frac{ءص}{ءس}$ (١ + $\frac{ءص}{ءس}$) + $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

ويكون (س + ص) $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ٢ $\frac{ءص}{ءس}$ + ($\frac{ءص}{ءس}$)^٢ = صفر

حاول أن تحل

٢ أ إذا كانت س^٢ + ص^٢ = ٩ **أثبت أن :** ص $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ($\frac{ءص}{ءس}$)^٢ + ١ = ٠

ب إذا كانت ص = ظا س **أثبت أن :** $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ٢ ص (١ + ص^٢)



معادلات بارامترية

مثال

③ إذا كانت $\text{س} = ٢\text{ن}^٣ - ٥$ ، $\text{ص} = ٦\text{ن}^٢ + ١$ أوجد $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ء س}^٢}$ عند $\text{ن} = ١$

الحل

باشتقاق كل من س ، ص بالنسبة للبارامتر ن

$\therefore \frac{\text{ء س}}{\text{ء ن}} = ٦\text{ن}^٢$ ، $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ن}} = ١٢\text{ن}$

$\therefore \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{ء ص}}{\text{ء ن}} \times \frac{\text{ء ن}}{\text{ء س}}$

$\therefore \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{١٢\text{ن}}{٦\text{ن}^٢} = ٢\text{ن}^{-١}$ ، $\text{ن} \neq ٠$

ويكون $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ء س}^٢} = \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}[٢\text{ن}^{-١}] = -٢\text{ن}^{-٢} \times \frac{\text{ء ن}}{\text{ء س}}$

$= \frac{-٢}{\text{ن}^٢} \times \frac{١}{٦\text{ن}^٢} = -\frac{١}{٣\text{ن}^٤}$ ، $\text{ن} \neq ٠$

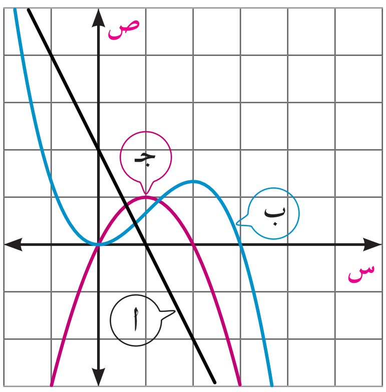
عند $\text{ن} = ١$ $\therefore \frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ء س}^٢} = -\frac{١}{٣}$

حاول أن تحل

③ إذا كانت $\text{س} = \text{ع}^٢ - ٢\text{ع}$ ، $\text{ص} = \text{ع}^٢$

أوجد $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ء س}^٢}$ ، $\frac{\text{ء}^٣\text{ص}}{\text{ء س}^٣}$ عند $\text{ع} = ٢$

تفكير ناقد: يبين الشكل المقابل تمثيلاً بيانيًّا لمنحنيات الدوال د(س)، د/(س) ، د//(س) حيث د(س) كثيرة حدود، حدد منحنى كل دالة.



نشاط

باستخدام البرنامج الرسومي geogebra أو أي برنامج آخر ارسم الدوال التالية ومشتقاتها الأولى والثانية وسجل ملاحظاتك.

أ) $\text{د(س)} = \text{س}^٣ - ٤\text{س}^٢ + ١٢$

ب) $\text{ر(س)} = \frac{١}{٤}\text{س}^٢ + ٤$

هل تتوافق ملاحظاتك مع قرارك في بند تفكير ناقد؟

تمـــاريـن الدرس (١ - ٣)

(١) إذا كانت $ص = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ى$ وكانت ارتباطات س ، ص ، ص′، ص″ موضحة بالجدول التالي:
أوجد قيم أ ، ب ، جـ ، ى الحقيقية ثم أكمل الجدول.

س	ص	ص′	ص″
١	٨		٢٨
٢		٧٥	٣٤

أوجد المشتقة الثالثة لكلًا مما يأتي:

(٢) $ص = س^{٥} - ٤س^{٣} + ٣$

(٣) $ص = \frac{٢ س}{س + ١}$

(٤) $ص = جا (٢ س - ٧)$

(٥) $ص = جتا (\pi - ٣ س)$

(٦) $ص = جا س جتا س$

(٧) $ص = \sqrt{٢ س - ٥}$

أجب عمّا يأتي:

(٨) إذا كان $٣س^{٢} + ٥ = ٢ س ص$ أثبت أن: $س \frac{ى^{٢}ص}{ى س^{٢}} + ٢ \frac{ى ص}{ى س} = ٣$

(٩) إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} = ٤$ أثبت أن: $ص^{٣} \frac{ى^{٢}ص}{ى س^{٢}} - ٤ = صفر$

(١٠) إذا كان $ص = ٣ جتا (٢ س + ١)$ أثبت أن: $\frac{ى^{٢}ص}{ى س^{٢}} + ٤ ص = ٠$

(١١) إذا كان $س ص = جا س جتا س$ أثبت أن: $س \frac{ى^{٢}ص}{ى س^{٢}} + ٢ \frac{ى ص}{ى س} + ٤ س ص = ٠$

(١٢) إذا كان $ص = س جا س$ أثبت أن: $س \frac{ى^{٣}ص}{ى س^{٣}} + س \frac{ى ص}{ى س} + ٢ ص = ٠$

(١٣) إذا كان $ص = قا س$ أثبت أن: $ص \frac{ى^{٢}ص}{ى س^{٢}} + (\frac{ى ص}{ى س})^{٢} = ص^{٢} (٣ص^{٢} - ٢)$

(١٤) إذا كان $\frac{ى ص}{ى س} = ٢ س - ٣ ، \frac{ى ع}{ى س} = س^{٢} - ١$ أوجد: $\frac{ى^{٢}ص}{ى ع^{٢}}$ عند $س = ٢$

(١٥) إذا كان $س = ٣ن^{٢} - ١ ، ص = ن^{٣} + ٢$ أوجد: $\frac{ى^{٢}ص}{ى س^{٢}}$ عند $ن = ٤$

(١٦) إذا كان $س = \frac{ع + ١}{ع - ١} ، ص = \frac{ع - ١}{ع + ١}$ أوجد: $\frac{ى ص}{ى س}$ عند $ع = ٢$

(١٧) إذا كان $س = قا ع ، \sqrt{ص} = ظا ع$ أثبت أن: $\frac{ى^{٢}ص}{ى س^{٢}} = ٢$

١ - ٤ معادلتا المماس والعمودى لمنحنى

Equation of the Tangent and the Normal to a Curve

سوف تتعلم

- إيجاد معادلة المماس عند نقطة واقعة على المنحنى.
- إيجاد معادلة العمودى لمنحنى عند نقطة واقعة على المنحنى.

المصطلحات الأساسية

- ميل المماس *Slope of the Tangent*
- ميل العمودى *Slope of the Normal*

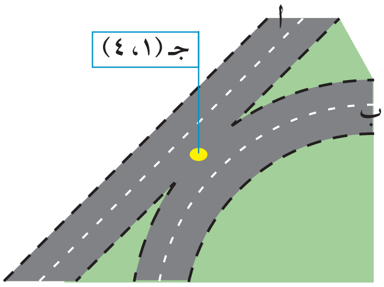
الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

نقطة على المنحنى ← $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ ← ميل المماس ← معادلة المماس

نقطة على المنحنى ← $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ ← ميل العمودى ← معادلة العمودى

فكر و ناقش



يوضح الشكل المقابل طريقين أ ، ب أحدهما مستقيم والآخر منحنى متلاقيين عند الموقع جـ . إذا كان الموقع جـ تمثله النقطة جـ (١، ٤) فى مستوى إحداثى متعامد، وكانت معادلة الطريق ب : ص = ٢ س^{٢} - ٣ س + ٥ ، هل يمكنك إيجاد معادلة الطريق أ ؟

هل يمر الطريق أ بالنقطة (٧ ، ١٠) ؟ فسر إجابتك.

تعلم

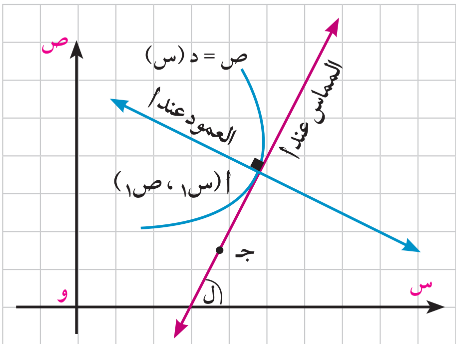
إذا كانت النقطة أ(س$_{١}$ ، ص$_{١}$) تقع على منحنى الدالة د حيث ص = د(س) ، م ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة ، فإن :

١- معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) هى :

ص - ص$_{١}$ = م (س - س$_{١}$)

٢- معادلة العمودى على المنحنى عند النقطة (س$_{١}$، ص$_{١}$)

هى : ص - ص$_{١}$ = $\frac{-١}{\text{م}}$ (س - س$_{١}$)



مثال

دوال مثلثية

① أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى ص = ٢س - ظتا س عند النقطة التى تقع على المنحنى و إحداثيها السينى يساوى $\frac{\pi}{٤}$

الحل

لإيجاد نقطة تقع على المنحنى عند س = $\frac{\pi}{٤}$ نحسب إحداثيها الصادى حيث :

ص = ٢س - ظتا س $\quad\therefore\quad$ ص = $\frac{٢ \times \pi}{٤}$ - ظتا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{\pi}{٢}$ - ١

أى إن النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ - ١) تقع على المنحنى

ميل مماس المنحنى عند أى نقطة = $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٢ - (-قتا^{٢}س) = ٢ + قتا^{٢} س

∴ عند النقطة $\left(\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٢} - ١\right)$:

ميل المماس = ٢ + [قتا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$] = ٤ ، ميل العمودى = - $\frac{١}{٤}$

معادلة المماس : ص - $\left(\frac{\pi}{٢} - ١\right)$ = ٤ $\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)$ **أى إن** : ص = ٤س - $\frac{\pi}{٢}$ - ١

معادلة العمودى: ص - $\left(\frac{\pi}{٢} - ١\right)$ = $\frac{-١}{٤}$ $\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)$ **أى إن** : ص = - $\frac{١}{٤}$ س + $\frac{٩}{١٦}\pi$ - ١

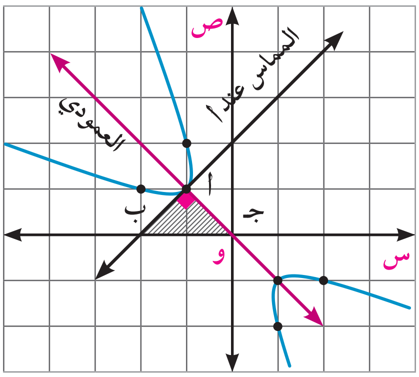
حاول أن تحل

١ أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى ص = ٣ + قا س عند النقطة التى تقع على المنحنى و إحداثيها السينى يساوى $\frac{٢\pi}{٣}$

مثال حساب المساحة

٢ أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى س^{٢} + ٣س ص + ص^{٢} + ١ = ٠ عند النقطة أ (-١، ١) ، و إذا قطعا محور السينات فى النقطتين ب ، جـ احسب مساحة المثلث أ ب جـ بالوحدات المربعة

الحل



∵ س^{٢} + ٣س ص + ص^{٢} + ١ = ٠

النقطة أ (-١، ١) تحقق معادلة المنحنى فهى تقع عليه باشتقاق طرفى معادلة المنحنى بالنسبة إلى س لإيجاد ميل المماس عند أى نقطة

∴ ٢ س + ٣س $\frac{ءص}{ءس}$ + ٣ص + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

عند النقطة أ (-١ ، ١) ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ١

∴ ميل المماس = ١ ، ميل العمودى = -١

معادلة المماس : ص - ١ = س + ١ **أى** ص = س + ٢

معادلة العمودى : ص - ١ = - (س + ١) **أى** ص = - س

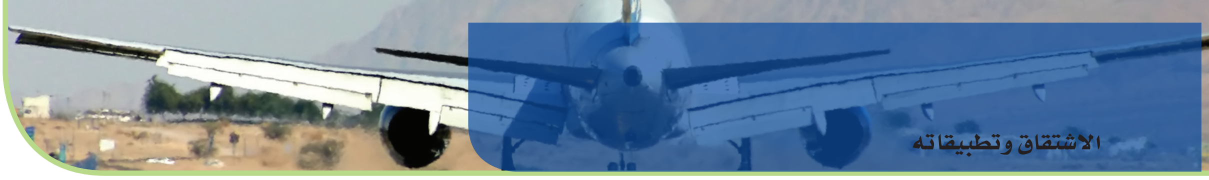
بحل معادلتى المماس والعمودى مع معادلة محور السينات ص = ٠ لإيجاد نقط التقاطع ب ، جـ

∴ النقطة ب (-٢، ٠) ، النقطة جـ (٠ ، ٠) ويكون ب جـ = ٠ - (-٢) = ٢

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ١ = ١ وحدة مربعة

حاول أن تحل

٢ أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور السينات والمماس والعمودى للمنحنى ٣س^{٢} + ص^{٢} = ١٢ عند النقطة (-١ ، ٣)



مثال

اشتقاق بارامترى

(٣) المعادلتان البارامتريتان لمنحنى هما   س = ن^{٢} + ٢   ،   ص = ن^{٣} + ١

أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى عند ن = ١

الحل

ميل المماس عند أى نقطة = $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ حيث :

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{ء ص}}{\text{ء ن}} \times \frac{\text{ء ن}}{\text{ء س}} = \frac{\text{ء ص}}{\text{ء ن}} \div \frac{\text{ء س}}{\text{ء ن}} = \frac{\text{٣ ن}^{٢}}{\text{٢ ن}} = \frac{٣}{٢}\text{ ن}$$

عند ن = ١ ميل المماس = $\frac{٣}{٢}$ ، ميل العمودى = $-\frac{٢}{٣}$ ،   ∴ س = (١)^{٢} + ٢ = ٣ ، ص = (١)^{٣} + ١ = ٢

أى إن النقطة (٣ ، ٢) تقع على المنحنى ، وعندها يكون :

معادلة المماس : (ص - ٢) = $\frac{٣}{٢}$ (س - ٣)   **أى** ٣س - ٢ ص - ٥ = ٠

معادلة العمودى : (ص-٢) = $-\frac{٢}{٣}$ (س - ٣)   **أى** ٢ س + ٣ص - ١٢ = ٠

حاول أن تحل

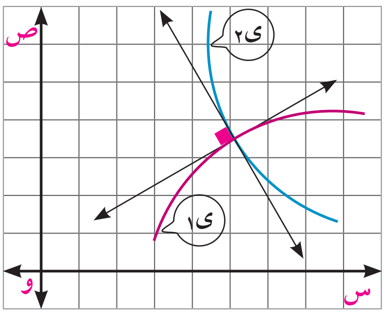
(٣) أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى س = جتا θ ، ص = $\sqrt{٢}$ + جا θ عند θ = $\frac{\pi}{٤}$

تفكير ناقد: إذا كانت النقطة (١ ، ٢) إحدى نقط تقاطع المنحنيين:

ص^{٢} - س^{٢} = ٣ ، س ص = ٢ هل يتعامد مماسا المنحنيين

عند هذه النقطة؟ فسر إجابتك.

ملاحظة مهمة : نقول إن المنحنيين ى$_{١}$ ، ى$_{٢}$ يتقاطعان على التعامد إذا كان المماسان المرسومان لهما من نقطة تقاطعهما متعامدين



تمارين الدرس (١ - ٤)

١) إذا كانت د ، ر ، ق دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ، أوجد معادلتى المماس والعمودى لمنحنى الدالة ق فى كل مما يأتى مستعينًا بالقيم المعطاة فى الجدول التالى:

أ) ق(س) = د(س) × ر(س) ، س = ٣

ب) ق(س) = د(س) ÷ ر(س) ، س = ٧

جـ) ق(س) = د[ر(س)] ، س = ٣

س	د(س)	ر(س)	د/(س)	ر/(س)
٣	١	٧	١ -	٦
٧	٢ -	١	٢	٥

٢) أوجد معادلتى المماس والعمودى لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) عند قيم س المعطاة:

أ) ص = ٣ - ظتا^{٢}س ، س = $\frac{\pi}{٤}$

ب) ص = ٢ جتا س - قا س ، س = $\frac{\pi}{٣}$

٣) أوجد معادلتى المماس والعمودى لكل من المنحنيات التالية عند النقط المعطاة:

أ) س^٢ + ص^٢ = ٥٢ عند النقطة (٤ ، - ٦)

ب) س^٢ + ٥ س ص + ص^٢ = ٧ عند النقطة (- ١ ، - ١)

جـ) ص^٢ (١ + س^٢) = ٨ عند النقطة (- ١ ، ٢)

د) (جا س + جتا س) ص = جتا^٢ س عند س = $\frac{\pi}{٢}$

٤) أوجد معادلتى المماس والعمودى لكل من المنحنيات التالية عند القيم المعطاة:

أ) س = ن^٢ + ٤ ن ، ص = ٢ن^٢ عند ن = ١

ب) س = قاθ ، ص = ظاθ عند θ = $\frac{\pi}{٦}$

٥) إذا كانت النقطة (٤ ، - ٢) تنتمى إلى المنحنى س^٢ + ص^٢ - ٢ ك س + ١٢ = ٠ أوجد قيمة ك، ثم أوجد معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة.

٦) **مساحة المثلث**: أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور السينات والمماس والعمودى عليه للمنحنى س^٢ + ٤ص^٢ = ٢٠ عند النقطة (٢ ، ٢)

٧) **تعامد منحنيين**: أثبت أن المنحنيين (س - ١)^٢ + ص^٢ = ٢ ، (س + ١)^٢ + ص^٢ = ٢ يتقاطعان على التعامد، ثم أوجد معادلات المماسات لهما عند نقط التقاطع.

١ - ٥ المعدلات الزمنية المرتبطة

Related Rates

سوف تتعلم

- مفهوم المعدلات الزمنية المرتبطة
- طرق حل معادلات المعدلات الزمنية المرتبطة
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وفيزيائية وحياتية

المصطلحات الأساسية

- معدل *Rate*
- معدلات مرتبطة *Related Rates*

الأدوات المستخدمة

- آله حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب

تحديد المتغيرات وتسميتها

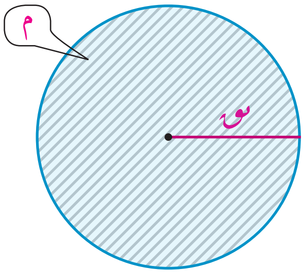
رسم تخطيطي للمدخلات

إيجـاد عـلاقـة الارتبـاط

اشتقاق العلاقة بالنسبة للزمن

التعويض عن القيم لإيجاد المعدل المطلوب

فكر و ناقش



عند تعرض صفيحة دائرية لمصدر حرارى زمنًا قدره (ن) ثانية

- هل يتغير طول نصف قطرها (نق) بتغير الزمن (ن)؟
- هل تتغير مساحة سطح الصفيحة (م) بتغير الزمن(ن)؟
- هل تتغير مساحة سطح الصفيحة (م) بتغير طول نصف قطرها (نق) ؟ فسر إجابتك.

لاحظ أن :

١ - المتغيرين م ، نق كلاهما يتغير بتغير الزمن (دالة فى الزمن) وتربطهما العلاقة

م $=$ π نق^٢ أى أن : م $=$ د(نق)

٢ - اشتقاق طرفي العلاقة السابقة بالنسبة للزمن يؤدى إلى معادلة جديدة تربط بين المعدل الزمنى لتغير كل منهما وتعرف بمعادلة المعدلات المرتبطة

حيث : $\frac{\text{ء م}}{\text{ء ن}} = \text{د}'(\text{نق}) \times \frac{\text{ء نق}}{\text{ء ن}}$

٣ - المعدل الزمنى يكون موجبًا إذا كان المتغير يتزايد بتزايد الزمن، ويكون سالبًا إذا كان المتغير يتناقص بتزايد الزمن.

تعبير شفهى : أى المعدلات التالية يكون موجبًا؟

(تمدد - انكماش - اقتراب - تباعد - صب - تسرب - انصهار - تراكم - تناقص - تزايد)

مثال نفخ البالون

١ بالون كُروى عند ملئه بالغاز كان معدل الزيادة فى حجمه ٨π سم^٣/ث عندما كان طول نصف القطر ٤سم . أوجد فى هذه اللحظة:

أ معدل زيادة طول نصف القطر.

ب معدل الزيادة فى المساحة السطحية.

الحل

بفرض أن حجم البالون (ح) وطول نصف القطر (نق) ، ومساحة سطح البالون (م) دوال قابلة للاشتقاق فى ن.

أ) $\text{ح} = \frac{٤}{٣}\pi\,\text{نق}^{٣}$ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة للزمن

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{٤}{٣}\pi \times ٣\,\text{نق}^{٢}\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = ٤\pi\,\text{نق}^{٢}\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$ (١)

$\therefore \frac{\text{دح}}{\text{دن}} = ٨\pi$ سم^{٣}/ث ، نق = ٤سم بالتعويض فى المعادلة

$\therefore ٨\pi = ٤\pi(٤)^{٢}\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$ أى $\frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = \frac{١}{٨}$ سم/ث

ب) $\text{م} = ٤\pi\,\text{نق}^{٢}$ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة للزمن

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٤\pi \times ٢\,\text{نق}\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = ٨\pi\,\text{نق}\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$ (٢)

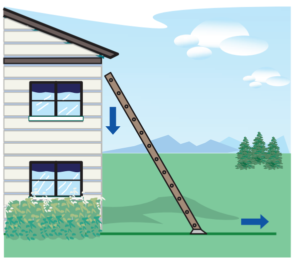
$\therefore \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = \frac{١}{٨}$ سم/ث ، نق = ٤سم بالتعويض فى المعادلة

$\therefore \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٨\pi \times ٤ \times \frac{١}{٨} = ٤\pi$ سم^{٢}/ث

؟ حاول أن تحل

١) **الحجم:** مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول حرفه بمعدل ٠,٠٢ سم/د، وتزداد مساحة سطحه فى لحظة ما بمعدل ٠,٧٢ سم^{٢}/د، أوجد طول حرف المكعب فى هذه اللحظة ومعدل الزيادة فى حجمه حينئذ.

مثال حركة السلم

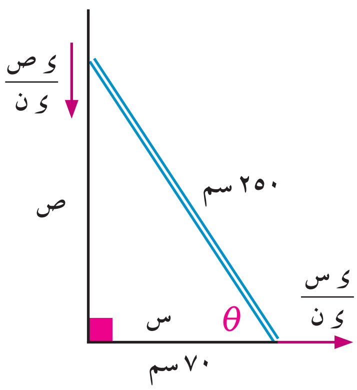


٢) يستند سلم طوله ٢٥٠سم على حائط رأسى، فإذا انزلق الطرف العلوى للسلم إلى أسفل الحائط بمعدل ١٠سم/ث عندما يكون الطرف السفلى للسلم على بعد ٧٠سم من الحائط . أوجد:

أ) معدل انزلاق الطرف السفلى للسلم.

ب) معدل تغير قياس الزاوية بين السلم والأرض.

الحل



أ) نفرض أن : ص المسافة بين الطرف العلوى للسلم والأرض،

س المسافة بين الطرف السفلى للسلم والحائط الرأسى.

من نظرية فيثاغورث $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = (٢٥٠)^{٢}$ (١)

باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة للزمن

$٢\,\text{س}\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٢\,\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٠ \quad \therefore \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -\frac{\text{ص}}{\text{س}}\,\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ (٢)

$\because$ الطرف العلوى ينزلق أسفل الحائط فإن ص تتناقص

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = -١٠$ سم/ث

عند س = ٧٠ سم ومن المعادلة (١) نجد أن: ص = ٢٤٠ سم

بالتعويض فى المعادلة (٢) ينتج أن: $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -\frac{٢٤٠}{٧} \times -١٠ = \frac{٢٤٠}{٧}$ سم/ث

أى إن الطرف السفلى للسلم ينزلق مبتعدًا عن الحائط بمعدل $\frac{٢٤٠}{٧}$ سم/ث

ب) نفرض أن : θ قياس زاوية ميل السلم على الأرض

$\text{جا}\,\theta = \frac{\text{ص}}{٢٥٠}$ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى ن

$\therefore \text{جتا}\,\theta \; \frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}} = \frac{١}{٢٥٠} \; \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ لكن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = -١٠ /\text{ث}$ عند س = ٧٠ سم

$\frac{٧٠}{٢٥٠} \times \frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}} = \frac{١}{٢٥٠} \times -١٠$ $\therefore \frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}} = -\frac{١}{٧}\,\text{ء/ث}$

أى إن قياس الزاوية يتناقص بمعدل $\frac{١}{٧}$ زاوية نصف قطريه/ ث

حاول أن تحل

٢) **حركة سلم:** يرتكز سلم بطرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسى . إذا انزلق الطرف السفلى مبتعدًا عن الحائط بمعدل ٣٠سم/ث ، أوجد معدل انزلاق الطرف العلوى عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض تساوى $\frac{\pi}{٣}$

تفكير ناقد: انطلق صاروخ كتلته ١٥ طنًا وكان ينفث الوقود بمعدل ثابت ٢٠٠ كجم/ث، ما كتلة الصاروخ بعد ٣٠ ثانية من لحظة إطلاقه؟

ملاحظة مهمة: إذا كانت $\text{س}_\cdot$ القيمة الابتدائية للمتغير س (عند ن = ٠) ، $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ معدل تغير س بالنسبة للزمن ، س قيمة المتغير بعد زمن ن **فإن :** $\boxed{\text{س} = \text{س}_\cdot + \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} \times \text{ن}}$

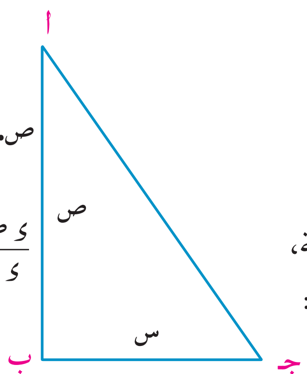
فى بند تفكير ناقد السابق استخدم العلاقة $\text{ك} = \text{ك}_\cdot + \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} \times \text{ن}$ لتتحقق من صحة إجابتك.

مثال **المساحة**

٣) مثلث قائم الزاوية طولا ضلعى القائمة ١٢سم ، ١٦سم، فإذا كان طول الضلع الأول يتزايد بمعدل ٢ سم/ث وكان طول الضلع الثانى يتناقص بمعدل ١ سم/ث.

أ) أوجد معدل تغير مساحة المثلث بعد ٢ ث

ب) متى يصبح هذا المثلث مثلثًا متساوى الساقين؟



$\text{ص}_\cdot = ١٦$ سم

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = -١$ سم/ث

$\text{س}_\cdot = ١٢$ سم $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٢$ سم/ث

الحل

أ) نفرض أن س ، ص طولا ضلعى القائمة بعد زمن قدره ن ثانية،

م مساحة المثلث حينئذ حيث س ، ص ، م دوال فى الزمن:

$\therefore \text{س} = ١٢ + ٢\text{ن} \quad ، \quad \text{ص} = ١٦ - \text{ن}$

$\text{م} = \frac{١}{٢}\text{س} \times \text{ص} = \frac{١}{٢}(١٢ + ٢\text{ن})(١٦ - \text{ن})$

$\text{م} = (٦ + \text{ن})(١٦ - \text{ن})$ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة للزمن

$\therefore \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = (٦ + \text{ن}) \times -١ + (١٦ - \text{ن}) = ١٠ - ٢\text{ن}$ سم²/ث

عند ن = ٢ ث $\therefore$ معدل تغير مساحة المثلث = ١٠ - ٢ (٢) = ٦ سم²/ث

ب عندما س = ص يكون ١٢ + ن = ١٦ - ن ∴ ن = $\frac{٤}{٣}$ ث

أى أن بعد $\frac{٤}{٣}$ ث يصبح المثلث القائم مثلثًا متساوى الساقين

حاول أن تحل

٣ **الحجم:** جسم معدنى على شكل متوازى مستطيلات، قاعدته مربعة الشكل، طول ضلعها يتزايد بمعدل ١سم/د وارتفاعه يتناقص بمعدل ٢سم/د . أوجد معدل تزايد حجمه عندما يكون طول ضلع قاعدته ٥سم وارتفاعه ٢٠سم، بعد كم دقيقة يتوقف تغير حجم متوازى المستطيلات عن الزيادة.

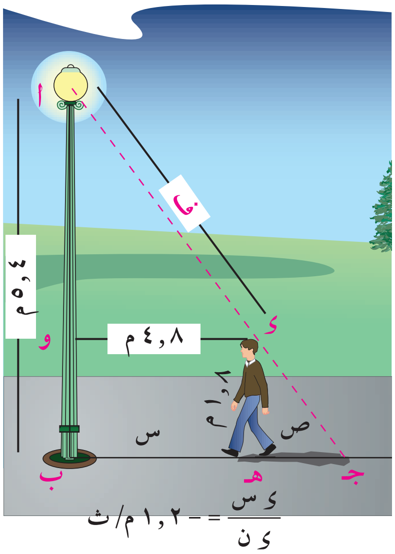
مثال طول الظل

٤ يسير رجل طوله ١,٨ متر فى خط مستقيم مقتربًا من قاعدة عمود إضاءة بمعدل ١,٢ متر/ث، فإذا كان ارتفاع مصباح عمود الإضاءة ٥,٤ مترًا عن سطح الأرض أوجد:

أ معدل تغير طول ظل الرجل.

ب معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح عندما يكون الرجل على بعد ٤,٨ مترًا من عمود الإضاءة.

الحل



نمذجة المشكلة: فى الشكل المقابل تمثل $\overline{اب}$ عمود الإضاءة، النقطة ا المصباح وتمثل $\overline{ءهـ}$ الرجل، والنقطة جـ نهاية ظل الرجل فيكون:

س = هـب بعد الرجل عن قاعدة عمود الإضاءة.

ص = هـجـ طول ظل الرجل.

ف = اء بُعد رأس الرجل عن المصباح.

أولًا: ∵ △ ابجـ ~ △ ءهـجـ

∴ $\frac{اب}{ءهـ} = \frac{بجـ}{هـجـ} = \frac{٥,٤}{١,٨} = \frac{س + ص}{ص}$

ويكون ٢ ص = س باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة للزمن

∴ ٢ $\frac{ءص}{ءن} = \frac{ءس}{ءن}$ أى $\frac{ءص}{ءن} = \frac{-١,٢}{٢} = -٠,٦$ متر/ث

ثانيًا: فى △ اءو القائم الزاوية فى (و)

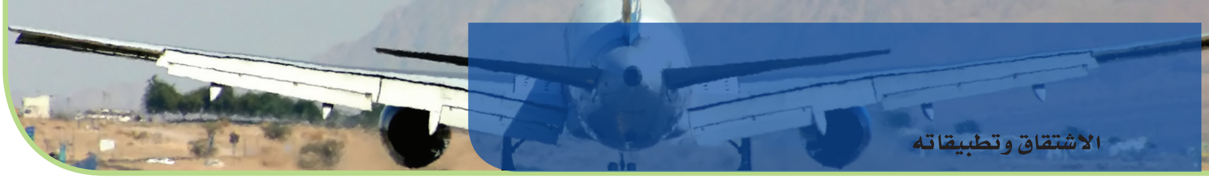
$ف^٢ = س^٢ + (٣,٦)^٢$ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى ن

٢ ف $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢ س $\frac{ءس}{ءن}$ عند س = ٤,٨ م ف = ٦ متر

٦ $\frac{ءف}{ءن}$ = ٤,٨ × -١,٢ أى $\frac{ءف}{ءن}$ = -٠,٩٦ متر/ث

حاول أن تحل

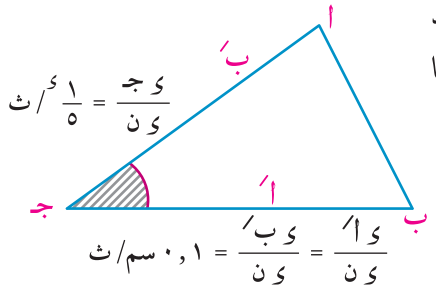
٤ **إنشاءات:** ماسورة مياه طرفاها ا ، ب ، وطولها ٥ أمتار، تستند بطرفها ا على أرض أفقية وبإحدى نقطها ء على سور رأسى ارتفاعه ٣ أمتار. فإذا انزلق الطرف ا مبتعدًا عن السور بمعدل $\frac{٥}{٤}$ متر/د أوجد معدل هبوط الطرف ب عندما تصل إلى حافة السور.



مثال **المساحة**

(٥) ضلعان فى مثلث يتزايد طول كل منهما بمعدل ٠,١ سم/ث ، ويتزايد قياس الزاوية المحصورة بينهما بمعدل $\frac{١}{٥}$ ء/ث. بأى معدل تتغير مساحة المثلث عند اللحظة التى يكون فيها طول كل ضلع من أضلاع المثلث ١٠سم.

الحل



نمذجة المشكلة: نفرض أن عند لحظة زمنية ن يكون طول أحد ضلعى المثلث أَ وطول الآخر بَ وقياس الزاوية المحصورة بينهما جـ ء ، م مساحة المثلث أ ب جـ دوال قابلة للاشتقاق في ن

حيث م = $\frac{١}{٢}$ أَ بَ جا جـ   باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى ن

$\therefore \frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٢} \text{ أَ بَ } \frac{\text{د}}{\text{د ن}}[\text{جا جـ}] + \frac{١}{٢} \text{ جا جـ } \frac{\text{د}}{\text{د ن}}[\text{أَ بَ}]$

$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٢} \text{ أَ بَ جتا جـ } \frac{\text{د جـ}}{\text{د ن}} + \frac{١}{٢} \text{ جا جـ} [\text{أَ } \frac{\text{د بَ}}{\text{د ن}} + \text{ بَ } \frac{\text{د أَ}}{\text{د ن}}]$ (١)

لكن $\frac{\text{د أَ}}{\text{د ن}} = \frac{\text{د بَ}}{\text{د ن}} = ٠,١$ ، $\frac{\text{د جـ}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٥}$

وعندما يكون طول كل ضلع من أضلاع المثلث ١٠سم يكون المثلث متساوى الأضلاع

فإن ق($\angle$جـ) = $\frac{\pi}{٣}$ ، جتا جـ = $\frac{١}{٢}$ بالتعويض فى المعادلة (١)

$\therefore \frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٢} \times ١٠ \times ١٠ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٥} + \frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} [٢ \times ١٠ \times \frac{١}{١٠}]$

$= ٥ + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \simeq ٥,٨٦٦$ سم^٢/ث

أى مساحة المثلث تتزايد عند هذه اللحظة بمعدل ٥,٨٦٦ سم^٢/ ث

حاول أن تحل

(٥) **المساحة:** أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى جـ ، مساحته ثابتة وتساوى ٢٤سم^٢، إذا كان معدل تغير بَ يساوى ١سم/ث فأوجد معدل تغير كل من أَ ، ق ($\angle$أ) عند اللحظة التى يكون فيها بَ يساوى ٨ سم.

تفكير ناقد: إذا كان س (قياس زاوية بالتقدير الدائرى) يتزايد بمعدل زمنى ثابت، فسر لماذا:

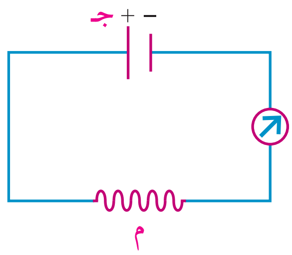
أ) يتزايد الجيب والظل بنفس المعدل   عند س = ٠

ب) يتزايد الظل بمعدل ٨ مرات قدر تزايد الجيب   عند س = $\frac{\pi}{٣}$

جـ) يتناقص جيب التمام بمعدل $\frac{٣}{٨}$ مرة قدر تزايد الظل   عند س = $\frac{\pi}{٦}$

مثال **الربط بالفيزياء**

(٦) فى دائرة كهربية مغلقة، إذا كان جـ فرق الجهد (ڤولت) ، ت شدة التيار (أمبير)، م المقاومة (أوم) وتزايد فرق الجهد بمعدل ١ ڤولت/ ث ، وتناقص شدة التيار بمعدل $\frac{١}{٢}$ أمبير/ث أوجد معدل المقاومة فى اللحظة التى يكون فيها جـ = ١٢ ڤولت ، ت = ٢ أمبير.



الحل

تعلم أن جـ = ت × م   باشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن

$\therefore \frac{دجـ}{دن} = ت \frac{دم}{دن} + م \frac{دت}{دن}$

$\because \frac{دجـ}{دن} = ١$ فولت / ث ، $\frac{دت}{دن} = -\frac{١}{٢}$ أمبير/ ث

$\therefore$ عند جـ = ١٢ فولت ، ت = ٢ أمبير فإن : م = $\frac{جـ}{ت} = \frac{١٢}{٢} = ٦$ أوم

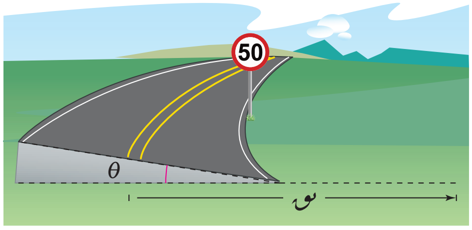
ويكون $١ = ٢ \times \frac{دم}{دن} + ٦ \times -\frac{١}{٢}$ $\therefore \frac{دم}{دن} = ٢$ أوم/ ث

أي إن معدل المقاومة فى هذه اللحظة ٢ أوم/ ث

حاول أن تحل

٦) فى المثال السابق احسب معدل المقاومة إذا كان التيار يتزايد بمعدل $\frac{١}{٣}$ أمبير / ث.

نشاط



تصميم الطرق: فى الطرق الدائرية والكبارى العلوية تتجنب أثر قوة الطرد المركزية على حركة السيارات بتصميم الطرق لتميل على المستوى الأفقي بزاوية قياسها θ نحو الداخل وفقًا للعلاقة د نق ظا θ = ع^٢ حيث (د) عجلة الجاذبية الأرضية، (ع) سرعة السيارة، (نق) طول نصف قطر دائرة المنحنى، أوجد معادلة الارتباط بين معدل تغير سرعة السيارات ومعدل تغير زاوية ميل الطريق. بماذا تنصح قائدى السيارات لتفادي قوة الطرد المركزية.

تمارين الدرس (١ - ٥)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{٤}{\pi}$ سم/ث فإن محيط الدائرة يزيد عند هذه اللحظة بمعدل:

أ) $\frac{٤}{\pi}$ سم/ث   ب) $\frac{\pi}{٤}$ سم/ث   جـ) $\frac{١}{٨}$ سم/ث   د) ٨ سم/ث

٢) ينصهر مكعب من الثلج محتفظًا بشكله بمعدل ١سم^٣/ث فإن معدل تغير طول حرف المكعب عندما يكون حجمه ٨ سم^٣ هو:.................. سم / ث

أ) $-\frac{١}{١٢}$ ب) $\frac{١}{١٢}$ جـ) $-\frac{١}{٦}$ د) $\frac{١}{٦}$

٣) جسم يتحرك على المنحنى ص^٢ = س^٣ ، إذا كان $\frac{دس}{دن} = \frac{١}{٢}$ وحدة / ث عند ص = - ١ فإن $\frac{دص}{دس}$ عند هذه اللحظة يساوى .... وحدة / ث

أ) $-\frac{٣}{٤}$ ب) $-\frac{٣}{٨}$ جـ) $\frac{٣}{٤}$ د) $\frac{٣}{٢}$

٤) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = د(س) عند نقطة ما = $\frac{١}{٢}$ وكان الإحداثى السينى لهذه النقطة يتناقص بمعدل ٣ وحدات / ث فإن معدل تغير إحداثيها الصادى يساوى .... وحدة / ث

أ) $-\frac{١}{٦}$ ب) $-\frac{٣}{٢}$ جـ) $\frac{١}{٦}$ د) $\frac{٣}{٢}$

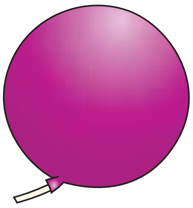
أجب عما يأتى:

٥ تتحرك نقطة على منحنى معادلته $س^٢ + ص^٢ - ٤ س + ٨ ص - ٦ = ٠$ فإذا كان معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن عند النقطة (٣، ١) يساوى ٤ وحدات / ث، أوجد معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن ن.

٦ سقط حجر فى بحيرة ساكنة فتولدت موجة دائرية يتزايد طول نصف قطرها بمعدل ٤سم/ث. أوجد معدل تزايد مساحة سطح الموجة فى نهاية ٥ ثوانٍ.

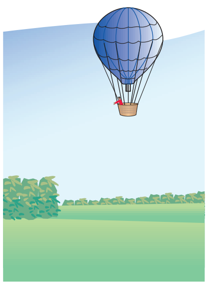
٧ صفيحة على شكل سداسى منتظم تنكمش بالبرودة ، وُجِدَ أن معدل تغير طول ضلعها ٠,١ سم/ث، أوجد معدل التغير فى مساحة الصفيحة عندما يكون طول ضلعها ١٠سم.

٨ كتلة معلومة من غاز درجة حرارتها ثابتة، انقص حجمها بمعدل ثابت قدره ٢سم^٣/ث. فإذا كان الضغط يتناسب عكسيًّا مع الحجم وأن الضغط يعادل ١٠٠٠ ث جم /سم^٢ عندما يكون الحجم ٢٥٠سم^٣. أوجد معدل تغير الضغط بالنسبة للزمن عندما يصبح حجم الغاز ١٠٠سم^٣.

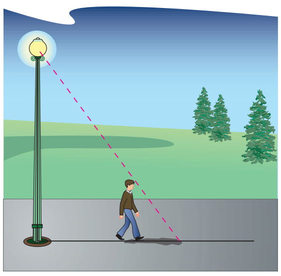


٩ يتسرب غاز من بالون كرى بمعدل ٢٠سم^٣/ث أوجد معدل تغير طول نصف قطر البالون فى اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطره ١٠سم، ثم أوجد معدل تغير مساحة السطح الخارجى للبالون فى نفس اللحظة.

١٠ سلم طوله ٥ أمتار يرتكز بطرفه العلوى على حائط رأسى وبطرفه السفلى على أرض أفقية، إذا تحرك الطرف السفلى مبتعدًا عن الحائط بمعدل ٤ سم/د عندما يكون الطرف العلوى على ارتفاع ٤ أمتار من الأرض، أوجد معدل انزلاق الطرف العلوى للسلم، ثم أوجد معدل تغير قياس الزاوية بين السلم والأرض عند هذه اللحظة.



١١ يرتفع بالون رأسيًّا لأعلى من نقطة أ على سطح الأرض. وضع جهاز لتتبع حركة البالون عند نقطة ب فى نفس المستوى الأفقى للنقطة أ وعلى بعد ٢٠٠ متر منها عند لحظة ما رصد الجهاز زاوية ارتفاع البالون فوجدها $\frac{\pi}{٤}$ وتتزايد بمعدل ٠,١٢ ء / د ، أوجد معدل ارتفاع البالون فى هذه اللحظة.



١٢ يسير رجل طوله ١٨٠ سم مبتعدًا عن قاعدة مصباح ارتفاعه ٣ أمتار بمعدل ١,٢ م/ث، أوجد معدل تغير طول ظل الرجل. وإذا كان المستقيم المار بأعلى نقطة من رأس الرجل وقمة المصباح يميل على الأرض بزاوية قياسها θء عندما يبعد الرجل عن قاعدة المصباح بمسافة قدرها س مترًا فأثبت أن س = $\frac{٦}{٥}$ ظتا θ ، ثم أوجد معدل تغير θ عندما يبعد الرجل مسافة ٣,٦ متر عن قاعدة المصباح.

١٣ مثلث متساوى الساقين طول قاعدته $٢٠\sqrt{٣}$. إذا كان طول كل من ساقيه يتناقص بمعدل ٣ سم/ساعة، فأوجد معدل تناقص مساحة سطح المثلث عند اللحظة التى يكون فيها طول كل من الساقين مساويًا لطول القاعدة.

ملخص الوحدة

مشتقات الدوال المثلثية Derivative of trigonometric function

الدالة		المشتقة
دالة الجيب	جا س	جتا س
دالة جيب التمام	جتا س	- جا س
دالة الظل	ظا س	قا^{2}س
دالة ظل التمام	ظتا س	- قتا ^{2} س
دالة القاطع	قا س	قا س ظا س
دالة قاطع التمام	قتا س	- قتا س ظتا س

الاشتقاق الضمنى Implicit Defferentiation

اشتقاق العلاقة الضمنية د(س، ص) = ٠ يتطلب اشتقاق كل من طرفى العلاقة بالنسبة لأحد المتغيرين س أو ص وفقًا لقاعدة السلسلة لنحصل على $\frac{ءص}{ءس}$ أو $\frac{ءس}{ءص}$ على الترتيب.

الاشتقاق البارامترى Parametric Defferentiation

المنحنى المعطى على الصورة البارامترية س = د(ن) ، ص = ر(ن) يكون $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \times \frac{ءن}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن}$

حيث د ، ر دالتان قابلتان للاشتقاق بالنسبة إلى ن

المشتقات العليا للدالة higher Derivatives of a function

إذا كانت ص= د(س) حيث د دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فتسمى المشتقات بدءًا من المشتقة الثانية (إن وجدت) بالمشتقات العليا ونرمز لها بالرمز $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ أو ص″ والمشتقة الثالثة بالرمز $\frac{ء^3ص}{ءس^3}$ أو ص‴ والمشتقة النونية بالرمز ص$^{(ن)}$ أو $\frac{ء^نص}{ءس^ن}$ أو د$^{(ن)}$ (س) حيث ن عدد صحيح موجب.

معادلتا المماس والعمودى لمنحنى quation of the tangent and the normal to a curve

إذا كان م ميل المماس لمنحنى ص = د(س) عند النقطة (س$_1$ ، ص$_1$) الواقعة عليه فإن:

معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (س$_1$ ، ص$_1$) هى : ص - ص$_1$ = م (س - س$_1$)

معادلة العمودى للمنحنى عند النقطة (س$_1$ ، ص$_1$) هى : ص - ص$_1$ = - $\frac{1}{م}$ (س-س$_1$)

المعدلات الزمنية المرتبطة Related Rates

إذا كانت ص = د(س) ، س تتغير تبعًا لتغير الزمن ن ، فإن ص تتغير أيضًا تبعًا لتغير الزمن ن أى إن ص دالة الدالة فى الزمن ن ويكون $\frac{ءص}{ءن} = \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءس}{ءن}$ وتربط هذه العلاقة المعدل الزمنى لتغير س بالمعدل الزمنى لتغير ص.

يكون المعدل موجبًا إذا كان المتغير يتزايد بتزايد الزمن.

يكون المعدل سالبًا إذا كان المتغير يتناقص بتزايد الزمن.

تمارين عامة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) إذا كان $ص = ٤ قا^{٢} س$ فإن $ص'(\frac{\pi}{٤})$ يساوى:

أ) -٨ ب) صفر ج) $٤\sqrt{٢}$ د) ١٦

٢) إذا كان $ص = جا ٢ س جتا ٢ س$ فإن $ص''(\frac{\pi}{٣})$ يساوى:

أ) -٤ ب) صفر ج) $٤\sqrt{٣}$ د) ٨

٣) تتحرك نقطة على المنحنى $س ص^{٢} = ١٢$ ، عند النقطة (٣ ، ٢) يكون $\frac{دس}{دص}$ يساوى:

أ) -٤ ب) $-\frac{٣}{٢}$ ج) $-\frac{١}{٣}$ د) ٣

٤) إذا كان $ص = ٢ن^{٣} + ٧$ ، $ع = ن^{٢} - ٤$ ، فإن معدل تغير ص بالنسبة إلى ع يساوى:

أ) ٢ ن ب) ٣ ن ج) ٦ د) ١٢

٥) يتزايد طول نصف قطر دائرة بمعدل ٢سم/د ومساحتها بمعدل ٢٠ π سم^{٢}/د، فإن طول نصف قطرها عند هذه اللحظة يساوى: .... سم

أ) $\frac{٥}{٢}$ ب) ٥ ج) ١٠ د) ٢٠

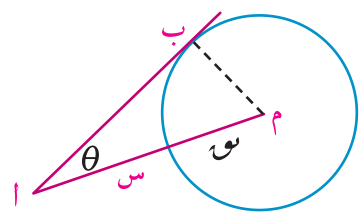
أجب عما يأتى:

٦) أوجد $\frac{دص}{دس}$ إذا كانت ص تساوى :

أ) $س + ظتا ٢ س$ ب) $\sqrt[٣]{س} + قا ٥ س$ ج) $٢ س - ٥ جتا (\pi س)^{٢}$

د) $٢ جتا^{٢} (\pi س + ١)$ هـ) $ظا س ظتا س$ و) $قا ٢ س ظا ٢ س$

٧) فى الشكل المقابل: أ نقطة تتحرك فى المستوى، $\overline{أب}$ مماس للدائرة م عند ب ، أ م = س + نق حيث نق طول نصف قطر الدائرة:



أ) أثبت أن $س = نق (قتا \theta - ١)$

ب) أوجد معدل تغير س بالنسبة إلى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{٦}$

٨) أوجد $\frac{دص}{دس}$ فى أبسط صورة لكل من:

أ) $س^{٢} - ٣ ص^{٢} + ٩ = ٠$ ب) $٥ س^{٢} + ١٢ ص^{٣} - ٧ = ٠$ ج) $س^{٢} - ٢ س ص + ٢ ص^{٢} = ١٤$

د) $(س - ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٥$ هـ) $س ص + جا س = ٥$ و) $جا س جتا ص = \frac{١}{٢}$

٩) أ) أوجد معدل تغير $(س + ٣)(س - ٢)$ بالنسبة إلى $\frac{س - ٣}{س + ٢}$

ب) إذا كانت $د(س) = \frac{٢}{س + ١}$ ، $ر(س) = ٣س$

أوجد $\frac{د}{دس} [(د \circ ر)(س)]$ عند $س = -٢$

(١٠) أ إذا كانت ص = $\sqrt{٢ س + ٥}$ أثبت أن (٢ س + ٥) $\frac{ء^٣ ص}{ء س^٣}$ + ٣ $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ = ٠

ب إذا كانت : س ص = جا أ س أثبت أن س $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ + ٢ $\frac{ء ص}{ء س}$ + أ^٢ س ص = ٠

ج إذا كانت ص = أ جتا س^٢ + ب جا س^٢ أثبت أن : س $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ - $\frac{ء ص}{ء س}$ + ٤س^٣ ص = ٠

(١١) أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنيات التالية عند النقط المعطاة:

أ س^٢ - س ص $\sqrt{٣}$ + ٢ص^٢ = ١٢ ($\sqrt{٣}$ ، ٣)

ب س جا ٢ ص = ص جتا ٢ س ($\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٢}$)

(١٢) أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنيات التالية عند القيم المعطاة:

أ س = ن^٢ + ٢ ن + ٣، ص = ٢ن^٣ - ٦ ن + ١ عند ن = ٠

ب س = قا^٢ θ - ١ ، ص = طاθ عند θ = $\frac{-\pi}{٤}$

(١٣) أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور الصادات، المماس، العمودى عليه للمنحنى ٤س^٢ + ص^٢ = ٢٠ عند النقطة (١ ، -٤).

(١٤) أثبت أن المنحنيين ص^٤ + ٩ص = ٦س ، س^٢ - ٢ ص = ٣ س متقاطعان على التعامد عند نقطة الأصل.

(١٥) أثبت أن المنحنى $(\frac{س}{أ})^ن$ + $(\frac{ص}{ب})^ن$ = ٢ يمس المستقيم $\frac{س}{أ}$ + $\frac{ص}{ب}$ = ٢ عند النقطة (أ ، ب) مهما تكن قيمة ن.

(١٦) إذا تحركت نقطة مادية فى خط مستقيم وكانت العلاقة بين المسافة والزمن هى ف = ٣ن^٣ + ٣ن^٢ - ٤ حيث ف بالسنتيمترات، ن بالثوانى . أوجد معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن فى نهاية ٣ ثوانٍ.

(١٧) بالون كُروي مملوء بالغاز يتسرب منه الغاز بمعدل س سم^٣/ث ، أثبت أن معدل نقص مساحته فى اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطره نق سم يساوى $\frac{٢س}{نق}$ سم^٢/ث.

(١٨) نقطة تتحرك على المنحنى ص^٢ = ٤س إذا كان معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن عند النقطة (٤، -٤) يساوى ٢ وحدة/ث فأوجد معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن.

(١٩) مستطيل طوله ٢٤سم وعرضه ١٠سم يتناقص طوله بمعدل ٢سم/ ث، بينما يتزايد عرضه بمعدل ١,٥سم/ث، أوجد معدل تغير مساحته بعد مضى ٤ ثوانٍ، ثم أوجد الزمن الذى تتوقف فيه المساحة عن التزايد . كم تكون مساحة المستطيل حينئذ؟

(٢٠) سلم ثابت الطول ينزلق طرفه العلوى على حائط رأسى بمعدل ك وحدة / ث، أوجد معدل ابتعاد طرفه السفلى عن الحائط عندما يميل السلم على الرأسى بزاوية θ حيث قتا θ = $\frac{٥}{٤}$.

(٢١) يتمدد هرم رباعى منتظم من المعدن ارتفاعه يساوى طول ضلع قاعدته فيزداد حجمه بمعدل ١سم^٣/ث، إذا كان معدل تزايد كل من ارتفاع الهرم وطول ضلع قاعدته يساوى ٠,٠١ سم/ث فأوجد طول ضلع قاعدته.

٢٢ سلم طوله ٢,٦ متر يستند بطرفه العلوى على حائط رأسى وبطرفه السفلى على أرض أفقية. إذا كان طرفه السفلى يتحرك مبتعدًا عن الحائط بمعدل ٤ متر/د عندما يكون على بعد ١ متر من الحائط . أوجد معدل تحرك طرفه العلوى ومعدل تغير قياس زاوية ميل السلم على الأرض حينئذ.

٢٣ متوازى مستطيلات أبعاده ٣، ٤، ١٢ من السنتيمترات إذا كان معدل تزايد بعده الأول ٢سم/ث ومعدل تزايد بعده الثانى ١سم/ث، ومعدل تناقص بعده الثالث ٣ سم/ث ، فأوجد حجم متوازى المستطيلات فى أى لحظة زمنية ن. ومعدل تغير حجمه فى نهاية ٢ ثانية .

٢٤ خزان بترول على شكل أسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ٢٤ مترًا. يُراد تفريغ الخزان من البترول بمعدل ٢م^{٣}/د ، فما معدل تغير ارتفاع البترول فى الخزان؟

٢٥ ترتفع طائرة عمودية رأسيًّا لأعلى بمعدل ثابت قدره ٤٢ م/د فإذا تم رصد الطائرة من مشاهد على الأرض ويبعد ١٥٠ م عن موقع إقلاعها ، فأوجد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد للطائرة عندما تكون على ارتفاع ١٥٠م من سطح الأرض.

٢٦ فى سباق ١٠٠ متر، يجرى لاعب فى مسار مستقيم باتجاه خط النهاية، وكانت إحدى كاميرات خط النهاية على مسافة ٥ أمتار وعمودية على مسار السباق وفى نفس المستوى الأفقى للمتسابقين . أوجد معدل تغير الزاوية التى تدور بها الكاميرا لرصد حركة اللاعب عندما كان على بعد ٥ أمتار من نهاية السباق ومعدل اقترابه لنقطة النهاية ١٠م/ث.

٢٧ تتحرك النقطة أ (س ، ص) على منحنى الدالة ص = س^{٣}+ س بحيث $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٢ وحدة / ث أوجد معدل التغير فى مساحة المثلث أ و ب حيث (و) نقطة الأصل ، النقطة ب (٠ ، ٦) فى اللحظة التى يكون فيها الإحداثى السينى للنقطة المتحركة يساوى ٣.

اختبار تراكمي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) إذا كانت د(س) = ظتا س فإن د″ $(\frac{\pi}{٤})$ تساوى :

أ $-\frac{٤}{٩}$ ب $\frac{٤}{٩}$ ج ٤ د $\frac{٩}{٢}$

٢) تتحرك نقطة على المنحنى ص^٢ = ٢٥ - س^٢ بحيث $\frac{دس}{دن} = \frac{١}{٢س + ٣}$ فإن: عند النقطة (- ٣ ، ٤)، $\frac{دص}{دن}$ تساوى:

أ $-\frac{١}{٤}$ ب $\frac{١}{٤}$ ج $\frac{١}{٩}$ د ٩

٣) إذا كان معادلة العمودى للمنحنى ص = د(س) عند النقطة (١ ، ١) هى س + ٤ ص = ٥ فإن د′(١) تساوى:

أ - ٣ ب $-\frac{١}{٤}$ ج ٤ د - ٤

٤) المماس للمنحنى ص = ٣س^٢ - ٥ عند النقطة (١، - ٢) يمر بالنقطة:

أ (٥ ، - ٢) ب (٣ ، ١) ج (٢ ، - ٤) د (٠ ، - ٨)

أجب عن الأسئلة الآتية:

٥) إذا كانت س = ن - ن^٢ ، ص = ن - ن^٣ أوجد $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$

٦) المعادلتان البارامتريتان لمنحنى هما س = ن^٢ - ٦ ن ، ص = ٨ $\sqrt{ن - ٢}$ أوجد معادلة المماس للمنحنى عند ن = ٦

٧) أ ب جـ مثلث مساحته م ، النقطة جـ تتحرك على المستقيم ص = ٢ س، فإذا كان أ (ل ، ٠) ، ب (٠، ك) حيث ل ، ك ثابتان موجبان أثبت أن $\frac{دم}{دس}$ = ل + $\frac{ك}{٢}$

٨) أوجد معدل تغير $\sqrt{٩ + س^٢}$ بالنسبة إلى $\frac{س}{س - ١}$ عند س = - ٤

٩) أ إذا كان ص = ٤ + ظتا س - قا^٢ س، أوجد معادلة العمودى عند س = $\frac{\pi}{٤}$

ب مُثمن منتظم طول ضلعه ١٠ سم ويتزايد بمعدل ٠,٢ سم/ث أوجد معدل تزايد مساحته.

١٠) سلم طوله ٤ أمتار يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسي وبطرفه الآخر على أرض أفقية، فإذا انزلق الطرف الملامس للأرض مبتعدًا عن الحائط بمعدل ٢٠ سم/ث . احسب معدل هبوط الطرف العلوى للسلم عندما يكون السلم مائلًا على الأرض بزاوية قياسها $\frac{\pi}{٣}$.

إذا لم تستطع الإجابة عن أحد هذه الأسئلة يمكنك الاستعانة بالجدول الآتى:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩		١٠
									أ	ب	
أرجع إلي	٣	٢	٤	٤	٢	٢	٢	٢	٤	٥	٥

الوحدة الثانية

تفاضل وتكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

The Calculus of Exponential and Logarithmic Functions

مقدمة الوحدة

فى هذه الوحدة، نتعرف العدد النيبيرى هـ نسبةً إلى العالم الاسكتلندى جون نابيير Johan napier (١٥٥٠ - ١٦١٧م) الذى أدخل مفهوم اللوغاريتمات إلى الرياضيات، كما يسمى أيضًا عدد أويلر Euler تكريمًا للعالم الذى درسه باستفاضة هو والدوال المرتبطة به واكتشافه للعلاقة هـ$^{\pi i}$ + ١ = ٠ بين أهم خمسة ثوابت فى الرياضيات والتى تربط بين الدوال المثلثية والدوال الأسية والأعداد المركبة.

والعدد هـ عدد حقيقى غير نسبى يساوى تقريبًا ٢,٧١٨٢٨١٨٢٨٤٥٩ له أهمية كبيرة فى الرياضيات، حيث اتخذ أساسًا للدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى هـ$^{\text{س}}$ [exp(x)] ، ودالة اللوغاريتم الطبيعى $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س [ln (x)] وسوف نتناول فى هذه الوحدة دراسة كل من هذه الدوال ومشتقاتها وكذلك مشتقاتها العكسية (التكامل) مع استخدام البرامج الرسومية لحل مشكلات رياضية وحياتية فى مجالات مختلفة.

مخرجات التعلم

فى نهاية هذه الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مفهوم العدد النيبيرى هـ من خلال النهايات

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} (١ + \text{س})^{\frac{١}{\text{س}}} = \text{هـ} \quad ، \quad \underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} (١ + \frac{١}{\text{س}})^{\text{س}} = \text{هـ}$$

- يوجد بعض النهايات التى تؤول إلى العدد هـ ومضاعفاته

$$\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} (١ + \frac{١}{\text{س}})^{٢\text{س}} = \underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} [(١ + \frac{١}{\text{س}})^{\text{س}}]^{٢} = \text{هـ}^{٢}$$

- يتعرف مفهوم اللوغاريتم الطبيعى $\text{لو}_{\text{هـ}}$ من خلال النهاية

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ا}^{\text{س}} - ١}{\text{س}} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ا}$$

- يتعرف بعض خواص اللوغاريتم الطبيعى مثل:
  - $\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} = \text{ص} \Leftrightarrow \text{هـ}^{\text{ص}} = \text{س}$
  - $\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}} = \text{س} \quad ، \quad \text{س} > ٠$
  - $\text{لو}_{\text{هـ}} \text{هـ} = ١ \quad ، \quad \text{لو}_{\text{ا}} \text{س} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ا}}$
- يوجد مشتقات الدوال الأسية ص = هـ$^{\text{س}}$ ، ص = ا$^{\text{س}}$ ، ومشتقه الدالة اللوغاريتمية ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س ، ص = $\text{لو}_{\text{ا}}$ س
- تكامل الدوال ص = هـ$^{\text{س}}$ ، $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س

المصطلحات الأساسية

- أس Exponent
- قوة Power
- أساس Base
- أسس كسرية Rational Exponents
- نمو أسي Exponential Growth
- تضاؤل أسي Exponential Decay
- دالة أسية Exponential Function
- معادلة أسية Exponential Equation
- لوغاريتم Logarithm
- صورة Form
- لوغاريتم معتاد Common Logarithm
- لوغاريتم طبيعي Natural Logarithm
- ثابت نابيير Napier`s Constant
- تفاضل لوغاريتمي Logarithmic Differentiation
- المشتقة العكسية Antiderivative
- تكامل Integration
- ثابت اختياري Arbitrary constant
- تكامل غير محدد Indefinite integral

دروس الوحدة

الدرس (٢ - ١): الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي ودالة اللوغاريتم الطبيعي.

الدرس (٢ - ٢): مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية.

الدرس (٢ - ٣): تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية.

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

مخطط تنظيمي للوحدة

الدوال الأسية — الدوال اللوغاريتمية

العدد هـ

الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي — تفاضل الدالة — تكامل الدالة — دالة اللوغاريتم الطبيعي

تطبيقات

هندسية — فيزيائية — حياتية

٢ - ١ الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى ودالة اللوغاريتم الطبيعى

Natural Exponential and Logarithmic Functions

سوف تتعلم

- مفهوم العدد النيبرى هـ من خلال النهايات.
- إيجاد نهاية دالة تؤدى إلى العدد هـ ومضاعفاته.
- تعرُّف الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى.
- مفهوم اللوغاريتم الطبيعى من خلال النهايات.

المصطلحات الأساسية

- الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى *Natural Exponential*
- دالة اللوغاريتم الطبيعى *Natural Logarithmic Functions*

الأدوات المستخدمة

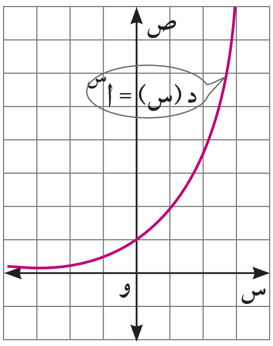
- آلة حاسبة علمية.
- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية.
- الشبكة العنكبوتية

ابحث عن العدد هـ ورمزه(e) فى الشبكة العنكبوتية لتعرف عنه المزيد.

استكشف

سبق أن درست الدالة الأسية: د (س) = $أ^{س}$

حيث س ∈ ع ، أ ∈ $ع^{+}$ - {١} وعلمت أن منحناها يمر بالنقط (٠ ، ١) ، (١ ، أ) ، (-١ ، $\frac{١}{أ}$)



- هل جميع منحنيات الدوال الأسية تمر بالنقطة (٠ ، ١)؟ فسر إجابتك.
- إذا مرَّ منحنى الدالة الأسية د بالنقطة (١ ، ٣)، ما قيمة الأساس أ؟

تعريف

العدد هـ The number e

يُعرف العدد هـ من العلاقة: هـ = $\lim\limits_{س \to \infty} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س}$

- ارسم منحنى الدالة د حيث د(س) = $هـ^{س}$ أى f(x) = exp(x) مستخدمًا برنامج geogebra أو أى برنامج رسومى آخر. هل تستطيع اكتشاف قيمة تقريبية للعدد هـ؟

استكشف $\lim\limits_{س \to \infty} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س}$ مستخدمًا حاسبة الجيب فى إكمال الجدول المقابل.

س	$\left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س}$
٢	$\left(١ + \frac{١}{٢}\right)^{٢}$ = ٢,٢٥
١٠	
١٠٠	
١٠٠٠	
١٠٠٠٠	
١٠٠٠٠٠	

- هل تقترب هذه النهاية من القيمة التقريبية السابق تعينها للعدد هـ؟ ماذا تستنتج؟
- هل $\lim\limits_{س \to \infty} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س}$ = $\lim\limits_{س \to ٠} \left(١ + س\right)^{\frac{١}{س}}$؟ فسر إجابتك

لاحظ أن

١) يمكن إيجاد قيمة هـ باستخدام حاسبة الجيب بالضغط على المفاتيح

ابدأ → Shift ln 1 =

نجد أن هـ ≃ ٢,٧١٨٢٨١٨٢٨ لأقرب ٩ أرقام عشرية

٢) ∵ $هـ = \lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س}$ (١)

بفرض $م = \frac{1}{س}$ حيث $س \neq 0$ فإن $م \to 0$ عندما $س \to \infty$

∴ $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س} = \lim_{م \to 0} (1 + م)^{\frac{1}{م}}$

أى إن يمكن التعبير عن العدد هـ بالصورة: $\boxed{هـ = \lim_{س \to 0} (1 + س)^{\frac{1}{س}}}$

مثال

نهايات تؤدى إلى قوى العدد هـ

١ أوجد:

أ $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{3س}$

ب $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س+3}$

الحل

أ $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{3س} = \lim_{س \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س}\right]^{3} = \left[\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س}\right]^{3} = هـ^{3}$

ب $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س+3} = \lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{3}$

$= \lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س} \times \lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{3} = هـ \times (1 + 0)^{3} = هـ$

حاول أن تحل

١ أوجد:

أ $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{\frac{1}{2}س}$

ب $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{2س+5}$

٢ أوجد:

أ $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{5}{س}\right)^{س}$

ب $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س + 2}{س - 1}\right)^{س+4}$

الحل

أ بفرض $ص = \frac{5}{س}$ حيث $س \neq 0$ فإن $ص \to 0$ عندما $س \to \infty$

∴ $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{5}{س}\right)^{س} = \lim_{ص \to 0} (1 + ص)^{\frac{5}{ص}} = \left(\lim_{ص \to 0} (1 + ص)^{\frac{1}{ص}}\right)^{5} = هـ^{5}$

ب $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س + 2}{س - 1}\right)^{س+4} = \lim_{س \to \infty} \left(\frac{س - 1 + 3}{س - 1}\right)^{س+4} = \lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{3}{س - 1}\right)^{س+4}$

$= \lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{3}{س - 1}\right)^{س-1} \times \lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{3}{س - 1}\right)^{5} = هـ^{3} \times (1)^{5} = هـ^{3}$

٩ حاول أن تحل

(٢) أوجد:

أ $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{٣}{\text{س}}\right)^{\text{س}}$ **ب** $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(١ - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢\text{س}}$

جـ $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{س}}{١ + \text{س}}\right)^{\text{س}}$ **د** $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢\text{س} + ٥}{٢\text{س} + ١}\right)^{\text{س} + ٢}$

لاحظ: يمكن التعبير عن العدد هـ باستخدام **(متسلسلة تايلور)** بالصورة:

$$\text{هـ} = ١ + \frac{١}{\lfloor ١} + \frac{١}{\lfloor ٢} + \frac{١}{\lfloor ٣} + \ldots\ldots \infty = \sum_{\text{ن} = ٠}^{\infty} \frac{١}{\lfloor \text{ن}}$$

تعلم

الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي

Natural Exponential Function

هى دالة أسية أساسها هـ ، د(س) = هـ$^{\text{س}}$ ، س $\in$ ع

لاحظ أن

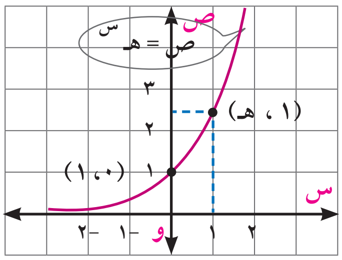
١) مجال الدالة د حيث د(س) = هـ$^{\text{س}}$ هو ع ومداها] ٠، ∞ [

٢) منحنى الدالة يمر بالنقطة (٠ ، ١) ، (١ ، هـ)

٣) د(س) = هـ$^{\text{س}}$ دالة احادية *(One - to - One)*

تقبل وجود دالة عكسية تعرف بدالة اللوغاريتم الطبيعي

٤) نستخدم الرمز *exp (x)* عند رسم الدالة باستخدام أى برنامج رسومى



$\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}$ هـ$^{\text{س}}$ = ∞ ،

$\underset{\text{س} \leftarrow -\infty}{\text{نهـا}}$ هـ$^{\text{س}}$ = صفر

دالة اللوغاريتم الطبيعى

Natural Logarithm Function

هى لوغاريتمية أساسها هـ ، د(س) = لو$_{\text{هـ}}$ س ، س $\in$ ع$^{+}$

لاحظ أن:

١) مجال الدالة د حيث د(س) = لو$_{\text{هـ}}$ س هو ع$^{+}$ ومداها ع

٢) منحنى الدالة يمر بالنقط (١ ، ٠) ، (هـ ، ١)

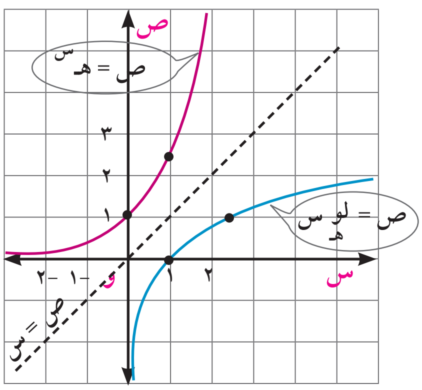
٣) هى دالة عكسية للدالة ص = هـ$^{\text{س}}$

٤) يستخدم الرمز *ln(x)* لرسم الدالة باستخدام أى برنامج رسومى للحاسب الآلي.

٥) لإيجاد قيمة لو$_{\text{هـ}}$ ١٠ مثلًا اضغط على المفاتيح التالية:

ابدأ → ln 1 0 =

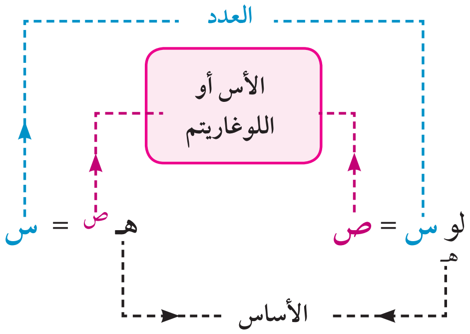
نجد أن لو$_{\text{هـ}}$ ١٠ = ٢,٣٠٢٥٨٥٠٩٣ لأقرب ٩ أرقام عشرية.



$\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}$ لو$_{\text{هـ}}$ س = ∞ ،

$\underset{\text{س} \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهـا}}$ لو$_{\text{هـ}}$ س = -∞

بعض خواص اللوغاريتم الطبيعى



اللوغاريتم الطبيعى له نفس خواص اللوغاريتمات السابق دراستها.

إذا كان س ∈ ع$^+$ ، ص ∈ ع ، أ ∈ ع$^+$ - {١} فإن:

١) الصورة لو$_{هـ}$ س = ص تكافىء الصورة هـ^{ص} = س

٢) هـ$^{لو_{هـ} س}$ = س ٣) لو$_{هـ}$ هـ = ١

٤) لو$_{هـ}$ ١ = صفر ٥) لو$_{أ}$ س = $\frac{لو_{هـ} س}{لو_{هـ} أ}$ (خاصية تغيير الأساس)

لكل س ، ص ∈ ع$^+$ ، ن ∈ ع

٦) لو$_{هـ}$ س ص = لو$_{هـ}$ س + لو$_{هـ}$ ص ٧) لو$_{هـ}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{هـ}$ س - لو$_{هـ}$ ص

٨) لو$_{هـ}$ س^{ن} = ن لو$_{هـ}$ س ٩) لو$_{هـ}$ س × لو$_{س}$ هـ = ١

لاحظ يمكن استخدام اللوغاريتمات الطبيعية لإجراء الحسابات العديدة بنفس طريقة استخدام اللوغاريتمات العادية، إلا أن ذلك يتطلب جهدًا أكبر بكثير، خاصة أن لو$_{هـ}$ ١٠ ≃ ٢,٣٠٢٦ لذلك يفضل استخدامه فيما يتعلق بالنهايات والاشتقاق وحل المعادلات الأسية واللوغاريتمية للأساس هـ

النهايات واللوغاريتم الطبيعى

مثال

٣ أثبت أن $\lim_{س \to ٠} \frac{أ^{س} - ١}{س}$ = لو$_{هـ}$ أ حيث أ > ٠

الحل

نفرض: ص = أ^{س} - ١ ، عند س ← ٠ فإن ص ← ٠ (١)

فيكون أ^{س} = ١ + ص بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ لو$_{هـ}$ أ^{س} = لو$_{هـ}$ (١ + ص) وباستخدام خاصية لوغاريتم القوة

∴ س لو$_{هـ}$ أ = لو$_{هـ}$ (١ + ص) أى أن: س = $\frac{لو_{هـ} (١ + ص)}{لو_{هـ} أ}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن:

$$\lim_{س \to ٠} \frac{أ^{س} - ١}{س} = \lim_{ص \to ٠} \frac{ص}{لو_{هـ} (١ + ص)} \times لو_{هـ} أ = \lim_{ص \to ٠} \frac{لو_{هـ} أ}{\frac{١}{ص} لو_{هـ} (١ + ص)} = \lim_{ص \to ٠} \frac{لو_{هـ} أ}{لو_{هـ} (١ + ص)^{\frac{١}{ص}}}$$

$$= \frac{لو_{هـ} أ}{\lim_{ص \to ٠} لو_{هـ} (١ + ص)^{\frac{١}{ص}}} = \frac{لو_{هـ} أ}{لو_{هـ} \lim_{ص \to ٠} (١ + ص)^{\frac{١}{ص}}} = \frac{لو_{هـ} أ}{لو_{هـ} هـ} = لو_{هـ} أ$$

ملاحظة هامة: يستخدم المثال السابق كقاعدة فى حل المسائل، كما يمكن استخدام النهايات التالية فى حل المسائل:

(١) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{لو_{أ}(١ + س)}{س} = لو_{أ}\, هـ$ **(٢)** $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{لو_{هـ}(١ + س)}{س} = ١$

حاول أن تحل

(٣) أثبت أن: $\lim\limits_{ن \to \infty} ن \left[لو_{هـ}(ن + ١) - لو_{هـ}\, ن \right] = ١$

تمارين ٢ - ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(١ + \dfrac{١}{س}\right)^{٢س}$ يساوى:

أ) ١ ب) ٢ ج) $هـ$ د) $هـ^{٢}$

(٢) $\lim\limits_{س \to ٠} (١ + س)^{\frac{١}{٣س}}$ يساوى:

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) $هـ^{٣}$ ج) $هـ^{\frac{١}{٣}}$ د) $\frac{هـ}{٣}$

(٣) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{٢^{س} - ١}{٣س}$ يساوى:

أ) $٣\, لو_{هـ}\, ٢$ ب) $\frac{١}{٣}\, لو_{هـ}\, ٢$ ج) $لو_{هـ}\, \frac{٢}{٣}$ د) $٢\, لو_{هـ}\, ٣$

(٤) $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{لو_{هـ}\, س}{س - ١}$ يساوى:

أ) صفر ب) ١ ج) $هـ$ د) $هـ^{-١}$

أوجد:

(٥) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(١ + \dfrac{١}{س}\right)^{س + ١}$

(٦) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(١ + \dfrac{١}{س + ١}\right)^{س}$

(٧) $\lim\limits_{م \to \infty} \left(١ + \dfrac{١}{م}\right)^{م\, س}$

(٨) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\dfrac{س + ٧}{س + ٣}\right)^{س + ٤}$

(٩) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{لو_{هـ}(١ + ٢س)}{س}$

(١٠) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{لو_{هـ}(١ + س^{٢})}{س^{٢}}$

أوجد النهايات الآتية:

(١١) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(١ + \dfrac{٤}{س}\right)^{س + ٣}$

(١٢) $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{هـ^{-س} - ١}{س}$

(١٣) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{أ^{٢س} - ١}{س}$

(١٤) $\lim\limits_{س \to ٠} (١ + ٣\, ظا^{٢} س)^{ظتا^{٢} س}$

(١٥) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\dfrac{٢س - ١}{٢س + ١}\right)^{س}$

(١٦) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{لو_{هـ}(١ + ٣س^{٢})}{٢س^{٢}}$

٢ - ٢ مشتقات الدوال الأسية واللوغارتمية

Derivatives of Exponential and Logarithmic Functions

سوف تتعلم

- مشتقات الدوال الأسية.
- مشتقات الدوال اللوغارتمية.
- التفاضل اللوغاريتمى.
- المشتقات العليا للدوال الأسية واللوغارتمية.
- نمذجة المشكلات.

المصطلحات الأساسية

- مشتقة Derivative
- قاعدة السلسلة Chain Rule
- المشتقة الأولى First Derivative
- الاشتقاق اللوغاريتمى Logarithmic Differentiation

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

استكشف

باستخدام الآلة الحاسبة أكمل الجدول التالى واستكشف $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}} - \text{١}}{\text{س}}$

س	٠٫٠٠١	٠٫٠٠٠١	٠٫٠٠٠٠١	٠	-٠٫٠٠٠٠١	-٠٫٠٠٠١	-٠٫٠٠١
$\dfrac{\text{هـ}^{\text{س}} - \text{١}}{\text{س}}$							٠٫٩٩٩٥٠٠

راجع مثال (٤) فى الدرس السابق وتحقق من صحة اكتشافك.

تعلم

مشتقة الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى

Derivative of Natural Exponential Function

> إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$ فإن $\text{د}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

من تعريف المشتقة

$$\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{و}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{و}) - \text{د}(\text{س})}{\text{و}}$$

$$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{و}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}+\text{و}} - \text{هـ}^{\text{س}}}{\text{و}} = \underset{\text{و}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}(\text{هـ}^{\text{و}} - \text{١})}{\text{و}}$$

$$= \text{هـ}^{\text{س}} \times \underset{\text{و}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{هـ}^{\text{و}} - \text{١}}{\text{و}}\right) = \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{١} = \text{هـ}^{\text{س}}$$

أى أن $\dfrac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{\text{س}}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

مثال

مشتقة الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى

١) أوجد المشتقة الأولى لكل من:

أ) $\text{ص} = \text{س}^{\text{٢}} + \text{٣هـ}^{\text{س}}$ ب) $\text{ص} = \text{س}^{\text{٣}}\,\text{هـ}^{\text{س}}$ جـ) $\text{ص} = \dfrac{\text{٢ هـ}^{\text{س}}}{\text{س} + \text{١}}$

الحل

أ) $\because \text{ص} = \text{س}^{\text{٢}} + \text{٣ هـ}^{\text{س}}$ $\therefore \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢س} + \text{٣} \dfrac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{\text{س}}) = \text{٢س} + \text{٣ هـ}^{\text{س}}$

ب) $\because \text{ص} = \text{س}^{\text{٣}}\,\text{هـ}^{\text{س}}$ $\therefore \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}^{\text{٣}} \dfrac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{\text{س}}) + \text{هـ}^{\text{س}} \dfrac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س}^{\text{٣}})$

$= \text{س}^{\text{٣}}\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{٣ س}^{\text{٢}}\,\text{هـ}^{\text{س}} = \text{س}^{\text{٢}}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,(\text{س} + \text{٣})$

ج ∵ $ص = \frac{2هـ^{س}}{س + 1}$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(س+1)\frac{ء}{ءس}(2هـ^{س}) - 2هـ^{س}\frac{ء}{ءس}(س+1)}{(س+1)^{2}} = \frac{2س\,هـ^{س}}{(س+1)^{2}}$

حاول أن تحل

(١) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتي:

أ $ص = 2هـ^{س} + جتا\,2س$ ب $ص = هـ^{س}\,جا\,س$ ج $ص = \frac{هـ^{س}}{طا\,س}$

تفكير ناقد: ما العلاقة بين ميل المماس للمنحنى $ص = هـ^{س}$ عند أي نقطة عليه والإحداثي الصادي لهذه النقطة؟ فسر إجابتك

قاعدة السلسلة

إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ، $د(ع) = هـ^{ع}$ فإن: $\frac{ء}{ءس}(هـ^{ع}) = هـ^{ع} \bullet \frac{ءع}{ءس}$

مثال

(٢) أوجد المشتقة الأولى لكل من:

أ $ص = هـ^{3س^{2}+5}$ ب $ص = 3هـ^{قا\,س}$ ج $ص = (هـ^{3س} - هـ^{-2س})^{5}$

الحل

أ ∵ $ص = هـ^{3س^{2}+5}$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = هـ^{3س^{2}+5} \times \frac{ء}{ءس}(3س^{2}+5) = 6س\,هـ^{3س^{2}+5}$

ب ∵ $ص = 3هـ^{قا\,س}$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = 3هـ^{قا\,س} \times \frac{ء}{ءس}(قا\,س) = 3هـ^{قا\,س} \bullet قا\,س\,طا\,س$

ج ∵ $ص = (هـ^{3س} - هـ^{-2س})^{5}$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = 5(هـ^{3س} - هـ^{-2س})^{4}\,[3هـ^{3س} + 2هـ^{-2س}]$

حاول أن تحل

(٢) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتي:

أ $ص = 2س + هـ^{6س}$ ب $ص = \frac{1}{2}هـ^{7-س^{2}}$ ج $ص = (هـ^{2س} + هـ^{-2س})^{3}$

تعلم

مشتقة الدالة الأسية للأساس ا

Derivative of Exponential Function to the Base a

إذا كانت $د(س) = ا^{س}$ فإن $د'(س) = ا^{س}\,لو_{هـ}\,ا$

$ا = هـ^{ص}$ ← $ا = هـ^{لو_{هـ} ا}$

$لو_{هـ}\,ا = ص\,لو_{هـ}\,هـ$

$ص = لو_{هـ}\,ا$

لاحظ أن $ا = هـ^{لو_{هـ} ا}$ (من خواص اللوغاريتمات) ∴ $ا^{س} = [هـ^{لو_{هـ} ا}]^{س} = هـ^{س\,لو_{هـ} ا}$

ويكون $\frac{ء}{ءس}(ا^{س}) = \frac{ء}{ءس}(هـ^{س\,لو_{هـ} ا}) = هـ^{س\,لو_{هـ} ا} \times لو_{هـ}\,ا = ا^{س} \times لو_{هـ}\,ا$

وبوجه عام فإن: $\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{ا}^{\text{ع}}) = \text{ا}^{\text{ع}} \; \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ا} \cdot \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$

مثال

مشتقه الدالة الأسية

٣ أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ لكل مما يأتي:

أ $\text{ص} = ٥ \times ٦^{\text{س}}$ ب $\text{ص} = ٣^{(٣\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٢)}$ جـ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{جاس}} \times ٢^{-٥\text{س}}$

الحل

أ $\because \text{ص} = ٥ \times ٦^{\text{س}}$ $\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٥ \frac{\text{د}}{\text{د س}}(٦^{\text{س}}) = ٥ \times ٦^{\text{س}} \; \text{لو}_{\text{هـ}} ٦$

ب $\because \text{ص} = ٣^{٣\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٢}$ $\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = (٦\text{س} - ٥) \times ٣^{(٣\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٢)} \times \text{لو}_{\text{هـ}} ٣$

جـ $\because \text{ص} = \text{هـ}^{\text{جاس}} \times ٢^{-٥\text{س}}$ $\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{هـ}^{\text{جاس}} \frac{\text{د}}{\text{د س}}(٢^{-٥\text{س}}) + (٢^{-٥\text{س}}) \frac{\text{د}}{\text{د س}} \text{هـ}^{\text{جا س}}$

$= \text{هـ}^{\text{جاس}} [-٥ \times ٢^{-٥\text{س}} \; \text{لو}_{\text{هـ}} ٥] + ٢^{-٥\text{س}} [\text{هـ}^{\text{جاس}} \; \text{جتا س}]$

$= ٢^{-٥\text{س}} \; \text{هـ}^{\text{جاس}} [\text{لو}_{\text{هـ}} ٢^{-٥} + \text{جتا س}]$

حاول أن تحل

٣ أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ لكل مما يأتي:

أ $\text{ص} = ٥\text{س}^٢ + ٢^{\text{س}}$ ب $\text{ص} = ٢^{\text{قا}^٢\text{س}}$ جـ $\text{ص} = \text{هـ}^{٢\text{س}} \; \text{ا} \, \text{س}^٢ - ٥$

تعلم

مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي *Derivative of Natural Logarithm Function*

إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$ ، $\text{س} > ٠$ فإن $\text{د}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$

لاحظ أن الدالة اللوغاريتمية هي دالة عكسية للدالة الأسية

إذا كان $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$ فإن $\text{س} = \text{هـ}^{\text{ص}}$ (١)

بتفاضل طرفي العلاقة (١) بالنسبة إلى س $\therefore ١ = \text{هـ}^{\text{ص}} \frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن: $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{١}{\text{س}}$ أى أن: $\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$

مثال

مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي

٤ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

أ $\text{ص} = ٣\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$ ب $\text{ص} = (٢\text{س}^٥ - ٣) \; \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$ جـ $\text{ص} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - ١}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + ١}$

الحل

أ $\because$ ص $= ٣$س $+ \text{لو}_{\text{هـ}}$ س $\therefore \frac{\text{ىص}}{\text{ىس}} = ٣ + \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س}) = ٣ + \frac{١}{\text{س}}$

ب $\because$ ص $= (٢\text{س}^{٥} - ٣)\ \text{لو}_{\text{هـ}}$ س $\therefore \frac{\text{ىص}}{\text{ىس}} = (٢\text{س}^{٥} - ٣)\frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س}) + (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س})\frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(٢\text{س}^{٥} - ٣)$

$= (٢\text{س}^{٥} - ٣) \times \frac{١}{\text{س}} + ١٠\text{س}^{٤}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س}$

$= \frac{١}{\text{س}}[(٢\text{س}^{٥} - ٣) + ١٠\text{س}^{٥}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س}]$

ج $\because$ ص $= \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س} - ١}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س} + ١}$ $\therefore \frac{\text{ىص}}{\text{ىس}} = \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س} + ١) \times \frac{١}{\text{س}} - (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س} - ١) \times \frac{١}{\text{س}}}{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س} + ١)^{٢}} = \frac{٢}{\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س} + ١)^{٢}}$

حاول أن تحل

٤ أوجد $\frac{\text{ىص}}{\text{ىس}}$ لكل مما يأتي:

أ ص $= ٥ - ٣\ \text{لو}_{\text{هـ}}$ س　　ب ص $= \text{س}^{٢}\ \text{لو}_{\text{هـ}}$ س　　ج ص $= \frac{١ - ٢\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س}}$

تفكير ناقد: ما العلاقة بين ميل المماس للمنحنى ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س عند أى نقطة عليه والإحداثى السينى لنقطة المماس؟ فسر إجابتك.

قاعدة السلسلة

- **إذا كانت** ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ، د(ع) = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ ع　　**فإن:** $\frac{\text{ى}}{\text{ىس}}[\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ ع}] = \frac{١}{\text{ع}} \cdot \frac{\text{ىع}}{\text{ىس}}$

- **إذا كانت** س < ٠ **فإن:** $\frac{\text{ى}}{\text{ىس}}[\text{لو}_{\text{هـ}}(-\text{س})] = \frac{١}{-\text{س}} \times -١ = \frac{١}{\text{س}}$

- **وبوجه عام**　$\frac{\text{ى}}{\text{ىس}}[\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|] = \frac{١}{\text{س}}$　لكل س $\neq ٠$

، $\frac{\text{ى}}{\text{ىس}}[\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}|] = \frac{\text{ع}'}{\text{ع}}$　حيث ع دالة قابلة للاشتقاق فى س.

مثال

٥ أوجد $\frac{\text{ى}}{\text{ىس}}$ لكل مما يأتي:

أ ص $= \text{لو}_{\text{هـ}}(٢\text{س}^{٣} + ٩)$　　ب ص $= \text{س}^{٤}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س}^{٣}$　　ج $\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س} + ٧}$

الحل

أ $\because$ ص $= \text{لو}_{\text{هـ}}(٢\text{س}^{٣} + ٩)$ $\therefore \frac{\text{ىص}}{\text{ىس}} = \frac{١}{٢\text{س}^{٣} + ٩} \times \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(٢\text{س}^{٣} + ٩) = \frac{٦\text{س}^{٢}}{٢\text{س}^{٣} + ٩}$

ب $\because$ ص $= \text{س}^{٤}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س}^{٣}$ $\therefore \frac{\text{ىص}}{\text{ىس}} = \text{س}^{٤}\frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س}^{٣}) + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س}^{٣}\frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{س}^{٤})$

$$= س^{٤} \times \frac{١}{س^{٣}} \times ٣س^{٢} + لو_{هـ} س^{٣} \times ٤ س^{٣}$$

$$= ٣س^{٣} + ٤س^{٣} لو_{هـ} س^{٣} = س^{٣} [٣ + ٤ لو_{هـ} س^{٣}]$$

ج $\frac{ء}{ء س} \left(لو_{هـ} \frac{س^{٢}}{س + ٧} \right) = \frac{س + ٧}{س^{٢}} \times \frac{(س + ٧)(٢س) - س^{٢} \times ١}{(س + ٧)^{٢}} = \frac{س + ١٤}{س (س + ٧)}$

؟ حاول أن تحل

٥ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ لكل مما يأتي:

أ $ص = لو_{هـ} (٧س - ٣)^{٢}$ ب $ص = ٢س^{٢} لو_{هـ} س^{٣}$ ج $ص = \frac{س}{لو_{هـ} س}$

تعلم

مشتقة الدالة اللوغاريتمية للأساس أ *Derivative of Logarithmic Function to the Base a*

إذا كانت $د(س) = لو_{أ} س$ فإن $د'(س) = \frac{١}{س لو_{هـ} أ}$

لاحظ $\frac{ء}{ء س} (لو_{أ} س) = \frac{ء}{ء س} \left[\frac{لو_{هـ} س}{لو_{هـ} أ} \right] = \frac{١}{لو_{هـ} أ} \frac{ء}{ء س} [لو_{هـ} س] = \frac{١}{س} \cdot \frac{١}{لو_{هـ} أ}$

ويكون $\frac{ء}{ء س} (لو_{أ} س) = \frac{١}{س} لو_{أ} هـ$

وبوجه عام $\frac{ء}{ء س} (لو_{أ} ع) = \frac{١}{ع لو_{هـ} أ} \cdot \frac{ء ع}{ء س}$

تذكر أن

من خواص اللوغارتيمات

$لو_{أ} س = \frac{لو_{هـ} س}{لو_{هـ} أ}$

$لو_{هـ} أ \times لو_{أ} هـ = ١$

مشتقة الدالة اللوغارتيمية

مثال

٦ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ لكل مما يأتي:

أ $ص = لو_{٣} س$ ب $ص = لو_{٥} (٣س - ٢)$ ج $ص = لو (٢س - ٣)^{٢}$

الحل

أ $\because ص = لو_{٣} س \quad \therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{س} \times \frac{١}{لو_{هـ} ٣} = \frac{١}{س لو_{هـ} ٣}$

ب $\because ص = لو_{٥} (٣س - ٢) \quad \therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{٣}{(٣س - ٢) لو_{هـ} ٥}$

ج ∵ ص = ٢لو |٢س - ٣| ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢ \times ٢}{|٢س - ٣|\ \text{لو}_{هـ} ١٠} = \frac{٤}{|٢س - ٣|\ \text{لو}_{هـ} ١٠}$

؟ حاول أن تحل

٦ أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات التالية عند قيم س المعطاة:

أ ص = $\text{لو}_{٢}$ ٥س ، س = ٢ ب ص = ٤ لو (٣س + ١) ، س = ١

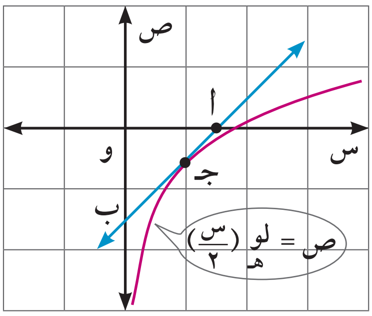
ج ص = $\text{لو}_{٢}$ $(٢س^{٢} - ٣)^{٤}$ ، س = ١ د ص = ٣ $(\text{لو س})^{٢}$ ، س = ٣

٧ تطبيقات هندسية: إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس للمنحنى ص = $\text{لو}_{هـ} \frac{س}{٢}$ فى النقطة جـ (١ ، ص) ويقطع محور السينات فى النقطة أ، ومحور الصادات فى النقطة ب أوجد طول $\overline{\text{أب}}$

الحل

لإيجاد طول $\overline{\text{أب}}$ نتبع المخطط المقابل

معادلة المماس $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ← نقط التقاطع أ، ب ← طول $\overline{\text{أب}}$



ميل المماس عند أى نقطة: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١ \times ٢}{س} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{س}$

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يمس المنحنى فى النقطة جـ (١ ، ص)

فإن ص = $\text{لو}_{هـ} \frac{١}{٢}$ = - $\text{لو}_{هـ}$ ٢ أى أن جـ (١ ، - $\text{لو}_{هـ}$ ٢)، وعندها

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١، وتكون معادلة المماس $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ عند جـ هى:

ص + $\text{لو}_{هـ}$ ٢ = س - ١

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يقطع محور السينات فى النقطة أ ∴ أ (١ + $\text{لو}_{هـ}$ ٢ ، ٠)

ويقطع محور الصادات فى النقطة ب ∴ ب (٠ ، - ١ - $\text{لو}_{هـ}$ ٢)

ويكون $(\text{أب})^{٢} = (١ + \text{لو}_{هـ} ٢)^{٢} + (١ + \text{لو}_{هـ} ٢)^{٢}$ ∴ أب = $\sqrt{٢}$ (١ + $\text{لو}_{هـ}$ ٢)

؟ حاول أن تحل

٧ إذا كان العمودى للمنحنى ص = $\text{لو}_{هـ}$ ٢س عند النقطة أ (١ ، $\text{لو}_{هـ}$ ٢) يقطع محور السينات فى النقطة ب أوجد طول $\overline{\text{أب}}$ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

تطبيقات رياضية

الاشتقاق اللوغاريتمى *Logarithmic Differentiation*

يمكن التعبير عن العلاقة بين المتغيرات بصورة لوغارتيمية بأخذ اللوغاريتم الطبيعى لطرفيها واستخدام خواص اللوغاريتمات فى تبسيط العلاقة قبل إجراء عملية الاشتقاق.

مثال

٨ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يأتى:

أ ص = $(س^{٣} + ٥)^{س}$ ب ص = $[\text{جا س}]^{\text{ظا س}}$

الحل

أ ∵ ص = (س^٣ + ٥)^س — بأخذ اللوغاريتم الطبيعى لطرفى العلاقة

∴ لوهـ ص = س لوهـ (س^٣ + ٥) — باشتقاق طرفى العلاقة بالنسبة إلى س

$\frac{١}{ص}\frac{ءص}{ءس}$ = لوهـ (س^٣ + ٥) + $\frac{س}{س^٣+٥}$ × ٣س^٢ — بضرب الطرفين × ص = (س^٣ + ٥)^س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = (س^٣ + ٥)^س [$\frac{٣س^٣}{س^٣+٥}$ + لوهـ (س^٣ + ٥)]

ب ∵ ص = [جا س]^طاس — بأخذ اللوغاريتم الطبيعى لطرفى العلاقة

لوهـ ص = طا س لوهـ جا س — باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$\frac{١}{ص}\frac{ءص}{ءس}$ = طا س × $\frac{ء}{ءس}$ (لوهـ جا س) + لوهـ جا س × $\frac{ء}{ءس}$ (طاس)

= $\frac{جا س}{جتا س}$ × $\frac{١}{جا س}$ × جتا س + لوهـ جا س × قا^٢س

= ١ + قا^٢س لوهـ جا س — بضرب الطرفين × ص = [جا س]^طاس

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = [جاس]^طاس (١ + قا^٢س لوهـ جا س)

٩ حاول أن تحل

٨ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتى

أ ص = س^٢س   ب ص = (جاس)^س   ج ص^٢ = ٣^س × ٢^ص

٩ تحقيق علاقة: إذا كانت ص = هـ^-س $\sqrt{\frac{١+س}{١-س}}$ حيث -١ < س < ١ أثبت أن: (١ - س^٢) ص َ = س^٢ ص

الحل

∵ ص = هـ^-س $\sqrt{\frac{١+س}{١-س}}$ — بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ لوهـ ص = لوهـ هـ^-س + $\frac{١}{٢}$ لوهـ $\frac{١+س}{١-س}$

لوهـ ص = - س + $\frac{١}{٢}$ [لوهـ (١ + س) - لوهـ (١ - س)]

بتفاضل طرفى العلاقة بالنسبة إلى س

$\frac{١}{ص}$ × ص َ = -١ + $\frac{١}{٢}$ [$\frac{١}{١+س}$ - $\frac{-١}{١-س}$]

$\frac{ص َ}{ص}$ = -١ + $\frac{١}{٢}$ [$\frac{١-س+١+س}{١-س^٢}$]

$\frac{ص َ}{ص}$ = -١ + $\frac{١}{١-س^٢}$ = $\frac{-١+س^٢+١}{١-س^٢}$

$\frac{ص َ}{ص}$ = $\frac{س^٢}{١-س^٢}$ ∴ (١ - س^٢) ص َ = س^٢ ص

حاول أن تحل

(٩) إذا كانت $ص = أهـ^{\frac{ب}{س}}$ اثبت أن: $س\,ص\,ص'' + ٢\,ص\,ص' - س\,{ص'}^{٢} = ٠$

تمارين ٢ - ٢

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) إذا كانت $د(س) = هـ^{٣س}$ فإن $د'(س)$ تساوى:

أ $هـ^{٣س}$ ب $٣هـ^{٣س}$ ج $٩هـ^{٣س}$ د $٣هـ^{٢س}$

(٢) إذا كان $د(س) = أهـ^{س}$ فإن $د'(-٢)$ تساوى:

أ $-د(٢)$ ب $-د'(٢)$ ج $-د(-٢)$ د $د(-٢)$

(٣) منحنى الدالة د: $د(س) = ١ + لو_{هـ}(س - ٢)$ هو نفس منحنى الدالة ر: $ر(س) = لو_{هـ} س$ بالانتقال:

أ (١ ، ٢) ب (١ ، -٢) ج (-٢ ، ١) د (٢ ، ١)

(٤) النسبة بين ميل مماس المنحنى $ص = لو_{هـ} \sqrt[٣]{٣س + ١}$ وميل مماس المنحنى $ص = لو_{هـ} \sqrt[٥]{٥س + ١}$ عند س = أ كنسبة

أ ٣ : ٥ ب ٥ : ٣ ج ١ : ١ د $لو_{هـ} ٣ : لو_{هـ} ٥$

أوجد المشتقة الأولى لكل من:

(٥) $ص = هـ^{٣س^{٥}}$ (٦) $ص = هـ^{س^{٢} - س}$ (٧) $ص = (٣^{س} - ١)^{-٢}$

(٨) $ص^{٢} = هـ^{٥س^{٢} - ٣}$ (٩) $ص = لو_{هـ}(٢س - ٧)$ (١٠) $ص = لو_{هـ}(\frac{١}{٢}س^{٢} + س)$

(١١) $ص = لو_{هـ} \frac{س^{٢}}{س + ٧}$ (١٢) $ص = س^{٢} لو_{هـ} س$ (١٣) $ص = لو_{٣}(٤س + ٩)^{٢}$

(١٤) $ص = \frac{هـ^{٣س}}{لو س}$ (١٥) $ص = قاهـ^{س}$ (١٦) $ص = ٢هـ^{٣س} - ٥ لو_{٢} \frac{س}{٥}$

أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات التالية عند القيم المعطاة:

(١٧) $ص = \sqrt{س} - ٢هـ^{س}$ ، $س = \frac{١}{٤}$

(١٨) $ص = س^{٢} - ٣لو_{هـ} س$ ، $س = ٢$

(١٩) $ص = \frac{١}{٤} هـ^{٢س} - ٢ لو_{هـ} س$ ، $س = \frac{١}{٢}$

أوجد $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ لكل مما يأتى:

(٢٠) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{هـ}^{٣}$
(٢١) $\text{ص} = \text{س لو}_{\text{هـ}} \, \text{ص} = ٥٨$
(٢٢) $\text{ص} = \text{س}^{\text{جاس}}$
(٢٣) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{هـ}^{\text{س}}}$
(٢٤) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^{\text{هـ}}}$
(٢٥) $\text{ص} = \text{س}^{\frac{١}{\text{س}}}$

أوجد $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ ، $\frac{\text{ى}^{٢}\text{ص}}{\text{ى س}^{٢}}$ لكل مما يأتى:

(٢٦) $\text{س} = \text{هـ}^{٢\text{ن}}$ ، $\text{ص} = \text{ن}^{٣}$

(٢٧) $\text{س} = ٦ \, \text{لو}_{\text{هـ}} \, \text{ن}$ ، $\text{ص} = \text{ن}^{٢}$

أجب عن كل ما يأتى:

(٢٨) إذا كانت $\text{ص} = \text{س}^{٢} \, \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}}{\text{أ}}$ فأوجد $\frac{\text{ى}^{٣}\text{ص}}{\text{ى س}^{٣}}$ عند $\text{س} = ٤$

(٢٩) إذا كانت $\text{هـ}^{\text{س}} = \sum_{\text{ن}=٠}^{\infty} \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}$ (مفكوك تايلور) أثبت أن: $\frac{\text{ى}}{\text{ى س}} (\text{هـ}^{\text{س}}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

(٣٠) إذا كانت $\text{ص} = \sqrt{\frac{\text{س}^{٢} + ١}{\text{س}^{٢} - ١}}$ أثبت أن $(\text{س}^{٤} - ١) \, \text{ص}' + ٢\text{س ص} = ٠$

(٣١) أوجد قيم س التى يكون عندها مماس المنحنى $\text{ص} = ٩\text{س}^{٣} - ٨ \, \text{لو}_{\text{هـ}} \, \text{س}$ موازيًا لمحور السينات.

(٣٢) أوجد معادلة العمودى للمنحنى $\text{ص} = ٣\text{هـ}^{\text{س}}$ عند نقطة واقعة عليه و إحداثيها السينى يساوى -١

(٣٣) الربط بالصناعة: إذا كان الإنتاج اليومى لأحد المصانع خلال فترة زمنية ن (يومًا) يتعين بالعلاقة $\text{ص} = ٤٠٠ \, (١ - \text{هـ}^{-٠{,}٣\text{ن}})$ وحدة أوجد معدل التغير فى عدد الوحدات المنتجة بالنسبة للزمن فى اليوم العاشر.

(٣٤) تطبيقات حياتية: إذا كان إنتاج خلية نحل من العسل يُعطَى بالعلاقة: $\text{ص} = (\text{ن} + ١٠٠) \, \text{لو} \, (\text{ن} + ٥)$ جرام بدلالة عدد الأيام ن. أوجد معدل تغير انتاج الخلية عند ن = ٥ ، ن = ١٥ ، ن = ٢٠. هل يتزايد إنتاج الخلية من العسل أم يتناقص؟

٢ - ٣

تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

Integrals of Exponential and Logarithmic Function

سوف تتعلم

- تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- تطبيقات هندسية.
- تطبيقات فيزيائية.

المصطلحات الأساسية

- مشتقة عكسية *Antiderivative*
- تكامل *Integration*
- تكامل غير محدد *Indefinite integral*
- ثابت اختيارى *Arbitrary constant*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسب الآلى.

استكشف

عند ث = ٥

و(س) = هـ$^{\text{س}}$ + ٥

$\frac{\text{ى}}{\text{ى س}}$ [و (س)]

ت(س) = هـ$^{\text{س}}$ + ث

ث ثابت

المشتقات العكسية للدالة د

$\int$ د(س) ى س

و′(س) = هـ$^{\text{س}}$ = د(س)

مشتقه الداله

من دراستك السابقة فى التفاضل تعلم أن مشتقة الدالة و بالنسبة إلى س حيث و(س) = هـ$^{\text{س}}$ + ٥ هى و′(س) = هـ$^{\text{س}}$

إذا رمزنا للدالة و′(س) بالرمز د(س) فإننا نستطيع بعملية عكسية (التكامل غير المحدد) إيجاد عدد غير محدد من الدوال الأخرى ت(س) + ث مشتقة كل منها يساوى د(س) تسمى بمجموعة المشتقات العكسية للدالة د إحداها يساوى و(س) حيث:

$\int$ د(س) ى س = ت(س) + ث   حيث ث ثابت اختيارى

استكشف مجموعة المشتقات العكسية لكل من:

د(س) = ٥هـ$^{\text{٥س}}$ ، ر(س) = ٨هـ$^{\text{٤س}}$ ، و(س) = $\frac{\text{١}}{\text{س}}$

تعلم

التكامل غير المحدد للدالة الأسية

Indefinite Integrals of Exponential Function

> إذا كان ك عددًا حقيقيًّا حيث ك ≠ ٠
>
> فإن: $\int$ هـ$^{\text{س}}$ ى س = هـ$^{\text{س}}$ + ث
>
> ، $\int$ هـ$^{\text{ك س}}$ ى س = $\frac{\text{١}}{\text{ك}}$ هـ$^{\text{ك س}}$ + ث   حيث ث ثابت اختيارى

مثال

١ أوجد:

أ $\int$ هـ$^{\text{٧س}}$ ى س   ب $\int$ هـ$^{\text{-}\frac{\text{٣}}{\text{٤}}\text{ص}}$ ى ص   جـ $\int$ ٨هـ$^{\text{٢ع}}$ ى ع

الحل

أ $\int$ هـ$^{\text{٧س}}$ ى س = $\frac{\text{١}}{\text{٧}}$ هـ$^{\text{٧س}}$ + ث

ب) $\int \text{هـ}^{-\frac{3}{4}\text{ص}}\, \text{ء ص} = \frac{1}{-\frac{3}{4}}\, \text{هـ}^{-\frac{3}{4}\text{ص}} + \text{ث} = \frac{-4}{3}\, \text{هـ}^{-\frac{3}{4}\text{ص}} + \text{ث}$

ج) $\int 8\,\text{هـ}^{2\text{ع}}\, \text{ءع} = 8 \int \text{هـ}^{2\text{ع}}\, \text{ءع} = \frac{8}{2}\, \text{هـ}^{2\text{ع}} + \text{ث} = 4\,\text{هـ}^{2\text{ع}} + \text{ث}$

تذكر أن

$\int \text{أ}\, \text{د(س)}\, \text{ءس} = \text{أ} \int \text{د(س)}\, \text{ءس}$

حاول أن تحل

١) أوجد

أ) $\int \pi\, \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{ءس}$ ب) $\int -\text{هـ}^{-5\text{ع}}\, \text{ءع}$ ج) $\int -6\,\text{هـ}^{0{,}2\text{ص}}\, \text{ءص}$ د) $\int 3\sqrt{2}\, \text{هـ}^{-\sqrt{2}\,\text{ن}}\, \text{ءن}$

مثال

٢) أوجد كل من التكاملات التالية:

أ) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}}}{2}\, \text{ءس}$ ب) $\int \frac{3\text{هـ}^{\text{س}} - 2\text{هـ}^{2\text{س}}}{2\text{هـ}^{\text{س}}}\, \text{ءس}$

الحل

أ) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}}}{2}\, \text{ءس} = \frac{1}{2} \int (\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}})\, \text{ءس}$

$= \frac{1}{2} \left[\int \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{ءس} + \int \text{هـ}^{-\text{س}}\, \text{ءس}\right]$

$= \frac{1}{2} (\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}}) + \text{ث}$

ب) $\int \frac{3\text{هـ}^{\text{س}} - 2\text{هـ}^{2\text{س}}}{2\text{هـ}^{\text{س}}}\, \text{ءس} = \int \frac{3}{2}\, \text{ءس} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{ءس}$

$= \frac{3}{2}\,\text{س} - \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

تذكر أن

$\int [\text{د(س)} \pm \text{ر(س)}]\, \text{ءس}$
$= \int \text{د(س)}\, \text{ءس} \pm \int \text{ر(س)}\, \text{ءس}$

حاول أن تحل

٢) أوجد:

أ) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}}\, \text{ءس}$ ب) $\int (\text{س}^{2} + 2\text{هـ}^{\text{س}})\, \text{ءس}$ ج) $\int (\text{س}^{-2} + \text{هـ}^{3\text{س}})\, \text{ءس}$

لاحظ أن: إذا كانت د(س) دالة قابلة للاشتقاق فإن:

$$\int \text{هـ}^{\text{د(س)}} \cdot \text{د}'\text{(س)}\, \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{د(س)}} + \text{ث}$$

مثال

٣) أ) $\int \text{جا س}\, \text{هـ}^{\text{جتا س}}\, \text{ءس}$ ب) $\int 4\text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}^2 + 1}\, \text{ءس}$

الحل

أ) بوضع د(س) = جتا س $\therefore$ د'(س) = - جا س

$\int \text{جا س}\, \text{هـ}^{\text{جتا س}}\, \text{ءس} = -\int \text{هـ}^{\text{جتا س}} (-\text{جا س})\, \text{ءس} = -\text{هـ}^{\text{جتا س}} + \text{ث}$

ب بوضع $د(س) = س^{٢} + ١$ ∴ $د'(س) = ٢س$

$\int ٤س\, هـ^{س^{٢}+١}\, ءس = ٢ \int هـ^{س^{٢}+١} (٢س)\, ءس = ٢هـ^{س^{٢}+١} + ث$

حاول أن تحل

(٣) أوجد التكاملات التالية:

أ $\int (جتا س\, هـ^{جاس} + ٣س^{٢})\, ءس$

ب $\int (س - ٣)\, هـ^{س^{٢} - ٦س + ٥}\, ءس$

التكامل غير المحدد للدوال اللوغاريتمية *Indefinite Integral of Logarithmic Functions*

تعلم أن $\frac{ء}{ءس}(لو_{هـ} س) = \frac{١}{س}$ حيث $س > ٠$ ، $\frac{ء}{ءس}(لو_{هـ} - س) = -\frac{١}{-س}$ حيث $س < ٠$

وبوجه عام فإن $\frac{ء}{ءس} لو_{هـ} |س| = \frac{١}{س}$ حيث $س \neq ٠$

أي إن الدالة $لو_{هـ} |س|$ حيث $س \neq ٠$ إحدى المشتقات العكسية للدالة $\frac{١}{س}$

وعلى ذلك فإن: $\boxed{\int \frac{١}{س}\, ءس = لو_{هـ} |س| + ث \qquad حيث\ س \neq ٠}$

مضاعفات الدالة

مثال

(٤) أوجد كلًّا من التكاملات التالية:

أ $\int \frac{٢}{س}\, ءس$ ب $\int \frac{٧}{س\, لو_{هـ} ٣}\, ءس$

الحل

أ $\int \frac{٢}{س}\, ءس = ٢ \int \frac{١}{س}\, ءس = ٢ لو_{هـ} |س| + ث$ حيث $س \neq ٠$

ب $\int \frac{٧}{س\, لو_{هـ} ٣}\, ءس = \frac{٧}{لو_{هـ} ٣} \int \frac{١}{س}\, ءس = \frac{٧}{لو_{هـ} ٣} لو_{هـ} |س| + ث$ حيث $س \neq ٠$

حاول أن تحل

(٤) أوجد:

أ $\int \frac{لو_{هـ} ٣}{س}\, ءس$ ب $\int \frac{٤}{٣س\, لو_{هـ} ٥}\, ءس$ ج $\int \frac{لو_{هـ} س^{٢}}{س\, لو_{هـ} س^{٣}}\, ءس$

مثال

٥ أوجد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ $\int \left(٣س^{٢} + \frac{٥}{س}\right) ءس$ ب $\int \left(\frac{٢هـ}{س} + \frac{س}{هـ}\right) ءس$ ج $\int \frac{(٣س - ١)^{٢}}{٣س}$

الحل

أ $\int \left(٣س^{٢} + \frac{٥}{س}\right) ءس = \int ٣س^{٢} ءس + \int \frac{٥}{س} ءس = س^{٣} + ٥ \text{ لو}_{هـ} |س| + ث$

ب $\int \left(\frac{٢هـ}{س} - \frac{س}{هـ}\right) ءس = ٢هـ \int \frac{١}{س} ءس - \frac{١}{هـ} \int س ءس = ٢هـ \text{ لو}_{هـ} |س| - \frac{س^{٢}}{٢هـ} + ث$

ج $\int \frac{(٣س - ١)^{٢}}{٣س} ءس = \int \frac{٩س^{٢} - ٦س + ١}{٣س} ءس = \int \left(٣س - ٢ + \frac{١}{٣س}\right) ءس$

$= \frac{٣س^{٢}}{٢} - ٢س + \frac{١}{٣} \text{ لو}_{هـ} |س| + ث$ حيث $س \neq ٠$

حاول أن تحل

٥ أوجد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ $\int \frac{٦س^{٢} - ٥}{٣س} ءس$ ب $\int \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - ٢س} ءس$ ج $\int \left(\sqrt{س} - \frac{٣}{\sqrt{س}}\right)^{٢} ءس$

لاحظ أن: إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق ، $د(س) \neq ٠$ فإن

$$\boxed{\int \frac{١}{د(س)} \cdot د'(س) ءس = \text{لو}_{هـ} |د(س)| + ث}$$

مثال

٦ أوجد كلًّا من التكاملات التالية:

أ $\int \frac{٤}{١ + ٢س} ءس$ ب $\int \frac{٢س + ٣}{س^{٢} + ٣س - ٢} ءس$ ج $\int ظا س ءس$

الحل

أ $\because (١ + ٢س)' = ٢$ $\therefore \int \frac{٤}{١ + ٢س} ءس = ٢ \int \frac{(١ + ٢س)'}{١ + ٢س} ءس = ٢ \text{ لو}_{هـ} |١ + ٢س| + ث$

ب $\because (س^{٢} + ٣س - ٢)' = ٢س + ٣$

$\therefore \int \frac{٢س + ٣}{س^{٢} + ٣س - ٢} ءس = \text{لو}_{هـ} |س^{٢} + ٣س - ٢| + ث$

ج $\int ظا س ءس = \int \frac{جا س}{جتا س} ءس = - \text{لو}_{هـ} |جتا س| + ث = \text{لو}_{هـ} |قا س| + ث$

حاول أن تحل

٦ أوجد كلًّا من التكاملات الآتية:

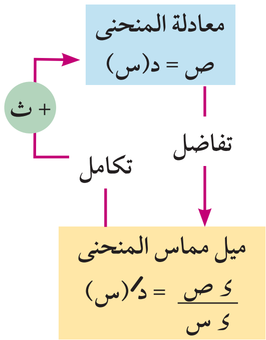
أ $\int ظتا س ءس$ ب $\int \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} + ٢س} ءس$ ج $\int \frac{(س^{٢} + ٢) ءس}{س^{٣} + ٦س + ١}$

مثال

(٧) **تطبيقات هندسية:** منحنى ميل المماس له عند أي نقطة عليه (س ، ص) يساوى $\frac{٣س+٢}{س}$ أوجد معادلة المنحنى إذا عُلم أنه يمر بالنقطة (هـ ، ٣هـ + ٥)

الحل

بفرض معادلة المنحنى ص = د(س)



∵ ميل المماس عند أى نقطة = $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣س+٢}{س}$

∴ ص = $\int \frac{ءص}{ءس}$ ءس = $\int (٣ + \frac{٢}{س})$ ءس

∴ ص = ٣س + ٢ لو$_{هـ}$ س + ث حيث ث ثابت إختيارى

∵ المنحنى يمر بالنقطة (هـ ، ٣هـ + ٥) فهى تحقق معادلته أى إن:

٣هـ + ٥ = ٣ (هـ) + ٢ لو$_{هـ}$ هـ + ث ∴ ث = ٣

و تكون معادلة المنحنى هى: ص = ٣س + ٢ لو$_{هـ}$ س + ٣

حاول أن تحل

(٧) ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى $\frac{١}{٢س - هـ}$ وكان د(هـ) = $\frac{١}{٢}$ أوجد د(٢هـ)

مثال

(٨) **تطبيقات فيزيائية:** إذا كان معدل التغير فى مساحة سطح صفيحة م (بالسنتيمتر المربع) بالنسبة للزمن ن (بالثانية) يتعيين بالعلاقة $\frac{ءم}{ءن}$ = هـ$^{-٠,١ن}$ وكانت مساحة الصفيحة عند بداية التغير تساوى ٨٠سم^{٢}، أوجد مساحة سطح الصفيحة بعد ١٠ ثوانٍ.

الحل

مساحة سطح الصفيحة م = $\int \frac{ءم}{ءن}$ ءن = $\int$ هـ$^{-٠,١ن}$ءن

∴ م = -١٠هـ$^{-٠,١ن}$ + ث

عند بداية التغير ن = ٠ ، م = ٨٠ ∴ ث = ٩٠

و يكون مساحة سطح الصفيحة فى أى لحظة م = ٩٠ - ١٠هـ$^{-٠,١ن}$

بعد ١٠ ثوانٍ ∴ مساحة سطح الصفيحة = ٩٠ - ١٠هـ$^{-١}$ سم^{٢}

حاول أن تحل

(٨) اذا كان معدل تغير مبيعات أحد المصانع يتناسب عكسيًّا مع الزمن بالأسابيع، وكانت مبيعات المصنع بعد أسبوعين و٤ أسابيع هى على الترتيب ٢٠٠، ٣٠٠ وحدة. أوجد مبيعات المصنع بعد ٨ أسابيع.

تمـــارين ٢ – ٣

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كان $\text{د}''(\text{س}) = \frac{١}{٢}[\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}}]$ ، $\text{د}(٠) = ١$ ، $\text{د}'(٠) = ٠$ فإن $\text{د}(\text{س})$ تساوى:

أ $-\text{د}'(\text{س})$ ب $\text{د}'(\text{س})$ ج $-\text{د}''(\text{س})$ د $\text{د}''(\text{س})$

(٢) إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى $٤\text{هـ}^{٢\text{س}}$ ، $\text{د}(٠) = ٢$ فإن $\text{د}(-٢)$ تساوى:

أ ٤ ب $٤\text{هـ}^{-٤}$ ج $٢\text{هـ}^{-٤}$ د ٢هـ

(٣) $\int \text{ظا}\,\theta \; ء\theta$ تساوى

أ $-\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتا}\,\theta| + \text{ث}$ ب $-\text{لو}_{\text{هـ}} \text{جتا}\,\theta + \text{ث}$ ج $\text{لو}_{\text{هـ}} \text{جتا}\,\theta + \text{ث}$ د $\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتا}\,\theta| + \text{ث}$

(٤) $\int ٤\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^٢} \; ء\text{س}$ تساوى

أ $\frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{س}^٢} + \text{ث}$ ب $\text{هـ}^{\text{س}^٢} + \text{ث}$ ج $٢\text{هـ}^{\text{س}^٢} + \text{ث}$ د $٤\text{هـ}^{\text{س}^٢} + \text{ث}$

أوجد كلًّا من التكاملات الآتية:

(٥) $\int \text{هـ}^{٤\text{س}} \; ء\text{س}$

(٦) $\int (٣\text{س}^٢ + ٢\text{هـ}^{\text{س}}) \; ء\text{س}$

(٧) $\int (\frac{٤}{\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}}) \; ء\text{س}$

(٨) $\int \text{هـ}^{١ - ٣\text{س}} \; ء\text{س}$

(٩) $\int \frac{٧}{٣}\text{هـ}^{٣\text{س} - ٤} \; ء\text{س}$

(١٠) $\int ٢\text{هـ}^{\text{س}}(\text{هـ}^{\text{س}} + ١)^٢ \; ء\text{س}$

(١١) $\int \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}} + ٢\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٤}{\text{هـ}^{\text{س}}} \; ء\text{س}$

(١٢) $\int \text{س}^٢\,\text{هـ}^{\text{س}^٣ + ١} \; ء\text{س}$

(١٣) $\int \frac{٢\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١} \; ء\text{س}$

(١٤) $\int \frac{ء\text{س}}{٤\text{س} - ١}$

(١٥) $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^٢ + ١} \; ء\text{س}$

(١٦) $\int \frac{\text{قا}^٢\text{س}}{\text{ظا س}} \; ء\text{س}$

(١٧) $\int \frac{\text{جا س} + \text{جتا س}}{\text{جا س} - \text{جتا س}} \; ء\text{س}$

(١٨) $\int \frac{\text{جتا س}}{١ + \text{جا س}} \; ء\text{س}$

(١٩) $\int \frac{\text{قا س ظا س}}{\text{قا س} - ١} \; ء\text{س}$

(٢٠) $\int \frac{١}{\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{ س}} \; ء\text{س}$

(٢١) $\int \frac{٢\text{س}}{(\text{س} + ١)^٢} \; ء\text{س}$

(٢٢) $\int \frac{(\text{لو س})^٢}{\text{س}} \; ء\text{س}$

(٢٣) $\int \frac{٣\text{س}^٢}{\text{س}^٣ - ١} \; ء\text{س}$

(٢٤) $\int \frac{٣\text{س}^٢ - ٥}{\text{س}^٣ - ٥\text{س} + ١} \; ء\text{س}$

(٢٥) $\int \frac{٤\text{هـ}^{\text{س}} + \text{س هـ}^{٢\text{س}}}{\text{س هـ}^{\text{س}}} \; ء\text{س}$

(٢٦) $\int \frac{٤}{\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{ ٣س}} \; ء\text{س}$

(٢٧) $\int \frac{(١ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س})^٢}{\text{س}} \; ء\text{س}$

(٢٨) تطبيقات هندسية: إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة (س ، ص) يساوى $٢\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{س}}$، $\text{د}(٠) = ١$ أوجد $\text{د}(٣)$

ملخص الوحدة

العدد هـ يُعرف العدد هـ من العلاقة

$$\text{هـ} = \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{س}} \quad ، \quad \text{هـ} = \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left(١ + \text{س}\right)^{\frac{١}{\text{س}}}$$

الدالة الأسية ذات الاساس الطبيعى دالة أسية أساسها هـ حيث $\text{د(س)} = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{س} \in \text{ح}$

دالة اللوغاريتم الطبيعى دالة لوغاريتمية أساسها هـ حيث $\text{د(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ ، $\text{س} \in \text{ح}$

مشتقات الدوال الأسية واللوغارتمية

الدالة	مشتقة الدالة	الشرط
$\text{هـ}^{\text{س}}$	$\text{هـ}^{\text{س}}$	$\text{س} \in \text{ح}$
$\text{هـ}^{\text{د(س)}}$	$\text{هـ}^{\text{د(س)}} \bullet \text{د}'\text{(س)}$	د قابله للاشتقاق
$\text{ا}^{\text{س}}$	$\text{ا}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ا}$	$\text{ا} > ٠$ ، $\text{ا} \neq ١$
$\text{لو}_{\text{هـ}} \lvert\text{س}\rvert$	$\frac{١}{\text{س}}$	$\text{س} \neq ٠$
$\text{لو}_{\text{هـ}} \lvert\text{د(س)}\rvert$	$\frac{١}{\text{د(س)}} \bullet \text{د}'\text{(س)}$	د قابله للاشتقاق ، $\text{د(س)} \neq ٠$

تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

الدالة	تكامل الدالة	الشرط
$\text{هـ}^{\text{س}}$	$\text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$	$\text{س} \in \text{ح}$
$\text{هـ}^{\text{ك س}}$	$\frac{١}{\text{ك}}\,\text{هـ}^{\text{ك س}} + \text{ث}$	$\text{ك} \neq ٠$
$\text{هـ}^{\text{د(س)}} \bullet \text{د}'\text{(س)}$	$\text{هـ}^{\text{د(س)}} + \text{ث}$	د قابلة للاشتقاق
$\frac{١}{\text{س}}$	$\text{لو}_{\text{هـ}} \lvert\text{س}\rvert + \text{ث}$	$\text{س} \neq ٠$
$\frac{١}{\text{د(س)}} \bullet \text{د}'\text{(س)}$	$\text{لو}_{\text{هـ}} \lvert\text{د(س)}\rvert + \text{ث}$	د قابلة للاشتقاق ، $\text{د(س)} \neq ٠$

تمارين عامة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) منحنى الدالة د حيث $د(س) = هـ^{س-٣} + ٢$ هو نفس منحنى ر $(س) = هـ^{س}$ بانتقال:

أ $(٢ ، ٣)$ ب $(٢ ، -٣)$ ج $(٣ ، -٢)$ د $(٣ ، ٢)$

(٢) إذا كان $د'(س) = س\, د(س)$ ، $د(٣) = -٥$ فإن: $د''(٣)$ تساوى:

أ -٥٠ ب -٤٠ ج ١٥ د ٢٧

(٣) $\int \frac{لو_{هـ} س^{٢}}{لو_{هـ} س}\, ءس$ تساوى:

أ $\frac{س}{٢} + ث$ ب $\frac{١}{س} + ث$ ج $٢س + ث$ د $لو_{هـ}|س| + ث$

(٤) $\int \frac{١}{س\, لو_{هـ} س^{٣}}\, ءس$ تساوى:

أ $٣\, لو_{هـ}|س| + ث$ ب $٣\, لو_{هـ}|لو_{هـ} س| + ث$ ج $\frac{١}{٣}\, لو_{هـ}|س| + ث$ د $\frac{١}{٣}\, لو_{هـ}|لو_{هـ} س| + ث$

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

(٥) $لو\,(س - ٣) = ٢$ (٦) $لو_{٢}\,(س + ٧) = ٥$ (٧) $هـ^{٥س+١} = ٢٠$

(٨) $لو_{هـ} ٤^{٢س-١} = لو_{هـ} ٥٠$ (٩) $لو_{هـ} هـ^{س} = ٢\, لو_{هـ} ٣$ (١٠) $٧^{س} = ٢٥$

أوجد كلًّا من النهايات التالية:

(١١) $\lim\limits_{ن \to \infty} (١ + \frac{٢}{ن})^{٣ن}$ (١٢) $\lim\limits_{س \to \infty} (\frac{ن}{ن+١})^{ن}$ (١٣) $\lim\limits_{س \to \infty} (\frac{٢س - ١}{٢س + ١})^{٢س}$

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل من:

(١٤) $ص = ٧هـ^{س} - ٣$ (١٥) $ص = هـ^{٣س^{٢}+١}$ (١٦) $ص = س^{٢}\, هـ^{-٣}$

(١٧) $ص = لو_{هـ}(س^{٢} + ٣)$ (١٨) $ص = س\, لو_{هـ} س^{٢}$ (١٩) $ص = هـ^{س}\, لو_{هـ}(س^{٢} + ١)$

(٢٠) $ص = \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}+١}$ (٢١) $ص = س^{٢}\, لو_{هـ} هـ^{س}$ (٢٢) $ص = \frac{١}{س}\, لو_{هـ} هـ^{س}$

أوجد $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ لكل مما يأتى:

(٢٣) $س = هـ^{٢ن}$ ، $ص = هـ^{٣ن}$ (٢٤) $س = ن^{٣}$ ، $ص = ٤\, لو_{هـ} ن$

أوجد $\frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}}$ لكل مما يأتى:

(٢٥) $ص = لو_{هـ} س$ (٢٦) $ص = س^{٣} + هـ^{٢س}$ (٢٧) $ص = س\, لو\, س$

(٢٨) إذا كان $\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{س}^{٢} + \text{ص}$ أثبت أن: $(\text{س هـ}^{\text{س ص}} - ١)\,\text{ص}' = ٢\text{س} - \text{ص هـ}^{\text{س ص}}$

(٢٩) إذا كانت $\text{س}^{٢}\,\text{ص} = \text{أ ب}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ أثبت أن: $\text{س}^{٢}\,\text{ص}'' + ٥\text{س ص}' + ٤\text{ص} = ٠$

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يأتى:

(٣٠) $\text{ص} = ٢^{\text{س}}\,(\text{س} + ١)$

(٣١) $\text{ص} = ٣\text{س}^{\text{س}^{٢} + ٣}$

(٣٢) $\text{ص} = (١ - ٣\text{س})^{\text{جتاس}}$

(٣٣) $\text{ص} = \text{س}^{\text{هـ}^{\text{س}}}$

أوجد قيم س التى يكون عندها مماس المنحنى يوازى محور السينات حيث س > ٠

(٣٤) $\text{ص} = \text{س}^{٣}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

(٣٥) $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}^{٢}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{٢}$

(٣٦) $\text{ص} = \text{س}^{٣} - ٨١\ \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

(٣٧) $\text{ص} = ٣ - \frac{\text{س}^{٢}}{٤} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\frac{\text{س}}{٢}$

(٣٨) إذا كان $\text{س هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{ص}} + \text{ص هـ}^{-\frac{\text{س}}{٢}} = ٢$ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند س = ٠

أوجد كلًا من التكاملات الآتية:

(٣٩) $\int \frac{٩ + ٦\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}}\ \text{ءس}$

(٤٠) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}}{\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}}}\ \text{ءس}$

(٤١) $\int (\frac{٣}{\text{س}} + ٤\text{هـ}^{-٢\text{س}})\ \text{ءس}$

(٤٢) $\int (\frac{\text{هـ}^{٣}}{\text{س}} + \text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\,٣)\ \text{ءس}$

(٤٣) $\int (\text{س}^{٣} - \frac{٢}{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}})\ \text{ءس}$

(٤٤) $\int \text{ظتا}^{٣}\,\text{س}\ \text{ءس}$

(٤٥) **التقاطع مع المحاور:** إذا كان مماس المنحنى $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ عند النقطة $(٢ ،\ \text{هـ}^{٢})$ يقطع محور السينات فى النقطة أ ، ومحور الصادات فى النقطة ب ، أوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$

(٤٦) **معادلتا المماس والعمودى:** أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى $\text{ص} = \text{س}^{٣} - ١٨\ \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ عند نقطة تقع عليه و إحداثيها السينى يساوى ٢.

(٤٧) **التناسب العكسى:** إذا كان ميل المماس عند أى نقطة (س ، ص) على منحنى الدالة د يتناسب عكسيًّا مع س وكان ميل المماس يساوى ٢ عند س = ٤ ، ص = ٢ أوجد ص بدلالة س.

(٤٨) **التوازى:** أوجد قيم س (لأقرب رقمين عشريين) التى يكون عندها مماس المنحنى $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}^{٢}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{٢}$ موازيًا لمحور السينات.

اختبار تراكمي

اختر الإجابات الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) $\underset{س \to \infty}{نهـا} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{٢س}$ تساوى:

أ) ١ ب) هـ ج) $هـ^{٢}$ د) $هـ^{-٢}$

(٢) م = $هـ^{لو_{هـ} ٧}$ فإن م تساوى:

أ) ١ ب) $\frac{١}{هـ}$ ج) هـ د) ٧

(٣) مجموعة حل المعادلة $لو_{هـ}$ (س - ٣) + $لو_{هـ}$ (س - ٢) = $لو_{هـ}$ ٦ هى:

أ) {٠ ، ٥} ب) {٥} ج) {٢ ، ٣} د) ϕ

(٤) إذا كانت د(س) = $س^{٢}$ - ٣ $لو_{هـ}$ ٥س فإن $د'$(٢) تساوى:

أ) -١ ب) ١ ج) $\frac{٥}{٢}$ د) ٦

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٥) أوجد المشتقة الأولى لكل من:

أ) ص = $(س^{٣} + ١)^{٢}$ ب) ص = $لو_{هـ} س^{٢}$ - $هـ^{٤س}$ ج) ص = $لو_{هـ} \left[\frac{هـ^{س^{٢}}}{س^{٢}}\right]$

(٦) إذا كانت ص = $هـ^{٣س}$ + $س^{٢}$ أثبت أن: $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ - ٢ = ٩ (ص - $س^{٢}$)

(٧) أوجد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ) $\int \frac{٢س^{٢} + ٣}{س}$ ءس ب) $\int \frac{ءس}{\sqrt{س}\, هـ^{\sqrt{س}}}$ ج) $\int \frac{٣}{٢س\, لو_{هـ} س}$ ءس

(٨) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى ٧ - ٢ $هـ^{س}$ وكان د($لو_{هـ}$ ٢) = ٣ ،
أوجد د(س).

إذا لم تستطع الإجابة عن أحد هذه الأسئلة يمكنك الاستعانة بالجدول الآتى:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
أرجع إلى	١	١	١	٢	٢	٢	٣	٣

الوحدة الثالثة

سلوك الدالة ورسم المنحنيات

Behavior of the Function and Curve Sketching

مقدمة الوحدة

يمكنك من خلال قراءة الشكل البيانى لمنحنى دالة أن تحدد فترات اطراد (تزايد - تناقص- ثبات) كما يمكن معرفة القيم العظمى والقيم الصغرى للدالة والتعرف على بعض خواص الدالة، كما تستطيع باستخدام البرامج الرسومية للحاسب الآلى رسم الدالة ودراسة سلوكها... إلا أن هذا ليس متاحًا دائما، لذلك ستعرف فى هذه الوحدة تقنيات أكبر لرسم منحنى الدالة من خلال حساب التفاضل باستخدام مشتقات الدالة (المشتقة الأولى والمشتقة الثانية) لتحديد فترات تزايد أو تناقص الدالة، وتعيين القيم العظمى والقيم الصغرى المرتبطة بقيم س (القيم العظمى والصغرى المحلية)، والقيم العظمى والصغرى المطلقة لدالة متصلة على فترة محددة [أ ، ب] واتجاه تحدب منحنى الدالة (لأعلى أو لأسفل) كما تدرس بعض التطبيقات لإيجاد القيم العظمى والصغرى لتساعدك فى نمذجة وحل مشكلات رياضية وفيزيائية وحياتية أخرى.

مخرجات التعلم

فى نهاية هذه الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يستخدم المشتقة الأولى لدراسة تزايد وتناقص الدالة القابلة للاشتقاق.
- يحدد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة القابلة للاشتقاق.
- يتعرف ويوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة لدالة فى فترة مغلقة.
- يوجد النقط الحرجة والتحدب لأعلى والتحدب لأسفل ونقط الانقلاب لدالةٍ.
- يوجد العلاقة بين منحنى الدالة والمشتقة الأولى.
- يدرس سلوك دالة من حيث اطراد والقيم العظمى والصغرى من خلال المشتقة الأولى.
- يرسم المنحنيات لدوال كثيرة الحدود حتى الدرجة الثالثة فقط.

المصطلحات الأساسية

- دالة متزايدة *Increasing Function*
- دالة متناقصة *Dereasing Functicn*
- القيم العظمى والصغرى *Maxima and Minima*
- القيم القصوى *Extrema*
- نقطة حرجة *Critical Point*
- قيمة صغرى محلية *Local Minimum*
- قيمة عظمى محلية *Local Maximum*
- قيمة قصوى محلية *Local Extrema*
- قيمة قصوى مطلقة *Absalute Extrema*
- التحدب *Convexity*
- تحدب لأعلى *Convex Upward*
- تحدب لأسفل *Convex Downward*
- نقطة انقلاب *Infection Point*

دروس الوحدة

الدرس (٣ - ١): تزايد وتناقص الدوال.

الدرس (٣ - ٢): القيم العظمى والصغرى (القيم القصوى)

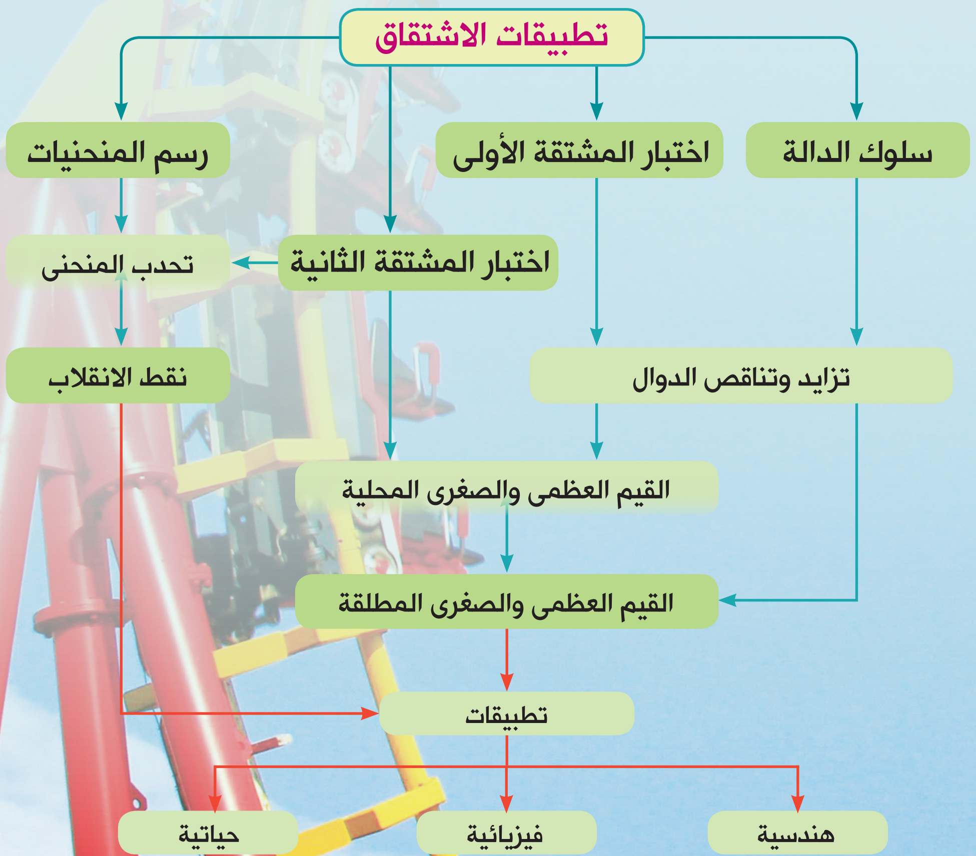
الدرس (٣ - ٣): رسم المنحنيات

الدرس (٣ - ٤): تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسب الآلى

مخطط تنظيمى للوحدة



٣ - ١ تزايد وتناقص الدوال

Increasing and Decreasing Functions

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

سوف تتعلم

- استخدام المشتقة الأولى فى تحديد فترات تزايد أو تناقص دالة.
- تطبيقات حياتية على فترات تزايد وتناقص الدالة.

المصطلحات الأساسية

- دالة متزايدة *Increasing Function*
- دالة متناقصة *Decreasing Function*

الأدوات المستخدمة

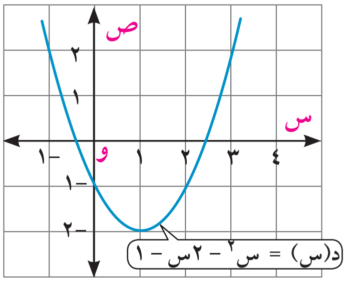
- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب

فكر و ناقش

توضح الأشكال المقابلة منحنى الدالتين د ، ر حيث

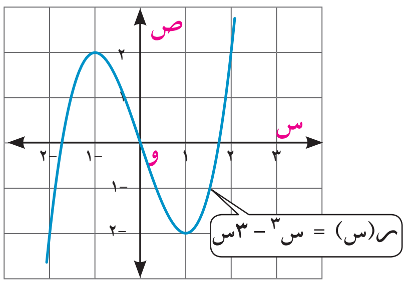
د (س) = س^{٢} - ٢س - ١ ،

ر (س) = س^{٣} - ٣س



- حدد فترات تزايد أو تناقص الدالة د
- أوجد مشتقة الدالة د وابحث إشارة د َ(س) لقيم س المختلفة التى تنتمى لفترة التزايد
- إبحث إشارة د َ(س) لقيم س المختلفة التى تنتمى لفترة التناقص

كرر ما سبق من خطوات لتحديد إشارة ر َ(س) فى فترات التزايد وفترات التناقص للدالة ر، ماذا تستنتج؟ وما نوع الزاوية التى يصنعها مماس المنحنى عند قيم س المختلفة فى فترات التزايد مع الاتجاه الموجب لمحور السينات؟



تعلم

اختبار المشتقة الأولى للدوال المطردة

First Derivative Test for Monotonic Functions

نظرية

لتكن د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة] أ ، ب [:

١- اذا كان د َ(س) > ٠ لجميع قيم س ∋] أ ، ب[

فإن د متزايدة على الفترة] أ ، ب]

٢- إذا كان د َ(س) < ٠ لجميع قيم س ∋] أ ، ب]

فإن د متناقصة على الفترة] أ ، ب]

بحث اطراد دالة

أوجد د َ(س)

حل المعادلة د َ(س) = ٠

إبحث اشارة د َ(س)

د َ(س) > ٠ → د متزايدة

د َ(س) < ٠ → د متناقصة

مثال
تحديد فترات التزايد والتناقص

(١) حدد فترات التزايد وفترات التناقص الدالة د حيث د (س) = س^{٣} - ٣س + ٢

الحل

∵ د(س) = س^{٣} - ٣س + ٢ دالة متصلة وقابلة للاشتقاق على ع

∴ دَ(س) = ٣س^{٢} - ٣ = ٣ (س^{٢} - ١)

بوضع دَ(س) = ٠ فيكون: ٣ (س^{٢} - ١) = ٣ (س - ١) (س + ١) = ٠

∴ دَ(س) = ٠ عندما س = -١ ، س = ١

نبحث إشارة دَ(س) فى كل من هذه الفترات كما فى جدول التغيرات المقابل فنجد:

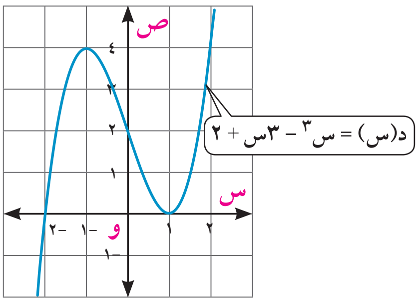
س	-∞	-١		١	∞
إشارة دَ(س)	+	٠	−	٠	+
سلوك د (س)	↗		↘		↗

د متزايدة على الفترة] -∞ ، -١ [

د متناقصة على الفترة] -١ ، ١ [

د متزايدة على الفترة] ١ ، ∞ [

لاحظ أن:



١) عند رسم منحنى الدالة د بأحد البرامج الرسومية (الشكل المقابل) نجد أن سلوك منحنى الدالة يطابق ما تم استنتاجه بجدول التغيرات.

٢) المماس للمنحنى يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فى فترات التزايد وزاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فى فترات التناقص.

٣) قيم س التى تفصل بين فترات التزايد والتناقص للدالة هى القيم التى تكون عندها المشتقة الأولى للدالة تساوى صفرًا أو غير موجودة

حاول أن تحل

(١) حدد فترات التزايد وفترات التناقص لكل مما يأتى:

أ) د (س) = س^{٣} - ٩س^{٢} + ١٥س

ب) ر(س) = $\frac{س}{س^{٢} + ١}$

مثال
دوال مثلثية

(٢) حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د حيث د (س) = س + ٢جا س ، ٠ < س < ٢π

الحل

س	-∞	$\frac{٢\pi}{٣}$		$\frac{٤\pi}{٣}$	∞
إشارة دَ(س)	+	٠	−	٠	+
سلوك د (س)	↗		↘		↗

د متصلة وقابلة للاشتقاق على] ٠ ، ٢π [

∴ دَ(س) = ١ + ٢ جتا س

بحث إشارة دَ(س)

عندما ١ + ٢ جتاس = ٠ ∴ جتاس = -$\frac{١}{٢}$

∵ س ∈] ٠ ، ٢π [∴ س = $\frac{٢\pi}{٣}$ أو س = $\frac{٤\pi}{٣}$

لاحظ أن:

عند س = $\frac{\pi}{2}$ دَ(س) = ١ > ٠   ∴ د تزايدية على] ٠ ، $\frac{2\pi}{3}$ [

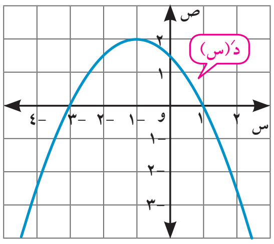
عند س = π دَ(س) = -١ < ٠   ∴ د متناقصة على] $\frac{2\pi}{3}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ [

عند س = $\frac{3\pi}{2}$ دَ(س) = ١ > ٠   ∴ د تزايدية على] $\frac{4\pi}{3}$ ، 2π [

حاول أن تحل

(٢) حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د حيث د(س) = س - ٢ جتا س ، ٠ < س < 2π

تفكير ناقد: يوضح الشكل المقابل منحنى دَ (س) للدالة د حيث د (س) كثيرة الحدود.



(أ) عين فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د

(ب) أوجد مجموعة حل المتباينة دً (س) > ٠

مثال

(٣) حدد فترات تزايد وفترات تناقص الدالة ر حيث ر (س) = ٢ لو$_{هـ}$ س - س^2

الحل

ر (س) قابلة للاشتقاق لكل س ∈ ع$^+$

رَ (س) = $\frac{٢}{س}$ - ٢س = $\frac{٢(١ - س^2)}{س}$

بحث إشارة رَ(س)

عندما رَ (س) = ٠   ∴ س = ١ أو س = -١ ∉ ع$^+$

عند س < ١   ∴ رَ (س) > ٠ وتكون ر تزايدية على] ٠ ، ١ [

عند س > ١   ∴ رَ (س) < ٠ وتكون ر تناقصية على] ١، ∞[

س	٠	١	∞
إشارة دَ (س)	+	٠	—
سلوك د (س)	↗		↘

حاول أن تحل

(٣) حدد فترات تزايد وفترات تناقص الدالة د حيث د (س) = س - هـ^{س} ، وباستخدام برنامج GeoGebra ارسم منحنى الدالة د وتحقق من إجابتك.

تمارين ٣ - ١

حدد فترات تزايد وفترات تناقص الدالة د فى كل مما يأتى:

(١) د (س) = س^{٢} - ٤س

(٢) د (س) = (س-٣)^{٢}

(٣) د (س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ٥

(٤) د (س) = ٩س - س^{٣}

(٥) د (س) = س^{٤} + ٤س

(٦) د (س) = ٢ - ٣ (س-٢)$^{\frac{٤}{٣}}$

(٧) د (س) = ١ - $\frac{١}{س}$

(٨) د (س) = $\frac{س - ٢}{س + ٢}$

(٩) د (س) = $\frac{\sqrt{س-١}}{س}$

(١٠) د (س) = س + لو$_{هـ}$ س

(١١) د (س) = ٣ - لو$_{هـ}$ س^{٢}

(١٢) د (س) = ٥ - ٢ هـ^{٢س}

أجب عما يأتى:

(١٣) أثبت أن الدالة د حيث د (س) = ظا س - س متزايدة على الفترة] ٠ ، $\frac{\pi}{٤}$ [

(١٤) حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د حيث د(س) = ١ - جاس ، ٠ < س < ٢π

(١٥) إذا كانت د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق ، د$'$(س) < ر$'$ (س) لكل س ∈ ع ، فأثبت أن الدالة ع حيث ع (س) = د (س) - ر(س) متناقصة لكل س ∈ ع.

القيم العظمى والصغرى (القيم القصوى)

Maxima and Minima (Extrema)

مكتب مستشار الرياضيات في مصر

سوف تتعلم

- مفهوم النقطة الحرجة.
- مفهوم القيم العظمى والصغرى المحلية لدالة.
- اختبار المشتقة الأولى للقيم العظمى والصغرى المحلية.
- إيجاد القيم القصوى لدالة على فترة مغلقة.

المصطلحات الأساسية

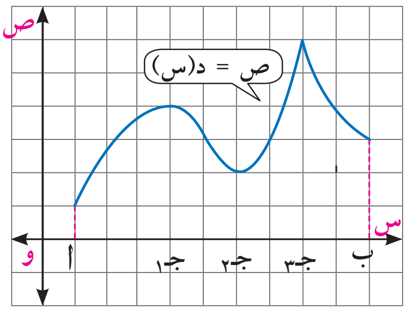
- نقطة حرجة *Critical point*
- قيمة عظمى محلية *Relative Maximum*
- قيمة صغرى محلية *Relative Minimum*
- قيم قصوى مطلقة *Absalute Extrema*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

فكر و ناقش

يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة د المتصلة على [أ ، ب]



١- حدد فترات تزايد وتناقص الدالة د

٢- عند س = حـ$_{١}$ ما قيمة د$'$(جـ$_{١}$)؟ صِفْ تغير د على الفترة] أ ، جـ$_{١}$ [هل د (جـ$_{١}$) أكبر قيم د في هذه الفترة؟

٣- عند س = جـ$_{٢}$ ما قيمةد$'$(جـ$_{٢}$)؟ صف تغير د على الفترة] جـ$_{١}$، جـ$_{٣}$ [، هل د (جـ$_{٢}$) أصغر قيم د في هذه الفترة؟

٤- هل يمكن إيجاد قيمة د$'$(جـ$_{٣}$)؟ فسر إجابتك.

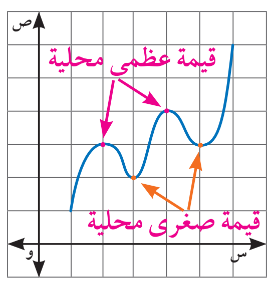
صف تغير د على الفترة]جـ$_{٢}$، ب [هل د (جـ$_{٣}$) أكبر قيم د في هذه الفترة؟

> **تعريف**
>
> **النقطة الحرجة** *Critical Point*
>
> للدالة د المتصلة على الفترة [أ ، ب]نقطة حرجة (جـ ، د (جـ))
>
> إذا كانت جـ ∈] أ ، ب [، د$'$(جـ) = ٠ أو الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = جـ.

في الشكل السابق نستنتج أن:

توجد نقط حرجة عند س = جـ$_{١}$ ، س = جـ$_{٢}$ لأن د$'$(جـ$_{١}$) = د$'$(جـ$_{٢}$) = ٠ ويطلق عليها أحيانا نقطة التوقف stationary point، كما توجد نقطة أخرى حرجة عند س = جـ$_{٣}$ لأن د متصلة عند س = جـ$_{٣}$ وغير قابلة للاشتقاق (المشتقة اليمنى ≠ المشتقة اليسرى).

> **تعريف**
>
> **القيم العظمى و القيم الصغرى المحلية**
>
> *Local Maximum and Local Minimum*
>
> إذا كانت د دالة متصلة، مجالها ف ، جـ ∈ ف فإنه يوجد للدالة د:
>
> **قيمة عظمى محلية عند س = جـ** إذا وجدت فترة مفتوحة] أ ، ب [⊃ ف تحوي جـ بحيث يكون د(س)⩽ د (حـ) لكل س ∈] أ ، ب [
>
> **قيمة صغرى محلية عند س = حـ** إذا وجدت فترة مفتوحة] أ ، ب [⊃ ف تحوي جـ بحيث يكون د (س) ⩾ د (حـ) لكل س ∈] أ ، ب]



لاحظ أن :

فى بند فكر وناقش: توجد قيم عظمى محلية عند س = جـ$_{١}$ ، س = جـ$_{٣}$ ، بينما توجد قيمة صغرى محلية عند س = جـ$_{٢}$

اختبار المشتقة الأولى للقيم العظمى والصغرى المحلية

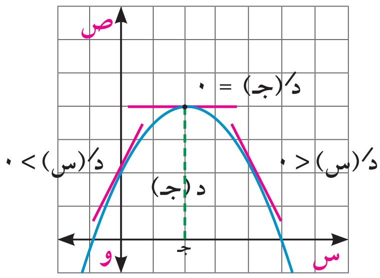
First Derivative Test for relative maximum and relative minimum

تعلم

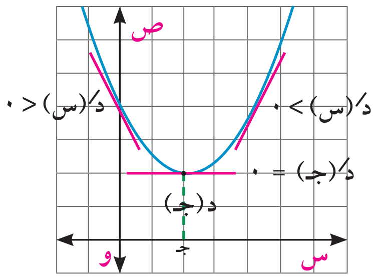
إذا كانت (جـ ، د (جـ)) نقطة حرجة للدالة د المتصلة عند جـ ، ووجدت فترة مفتوحة حول جـ بحيث:

١- د/(س) > ٠ عندما س < جـ ، د/(س) < ٠ عندما س > جـ ، فإن د (جـ) قيمة عظمى محلية

٢- د/(س) < ٠ عندما س < جـ ، د/(س) > ٠ عندما س > جـ ، فإن د (جـ) قيمة صغرى محلية



د (جـ) قيمة عظمى محلية عند جـ



د (جـ) قيمة صغرى محلية عند جـ

٣- إذا لم يحدث تغير فى إشارة د/(س) على جانبى جـ ، فإنه لا يوجد للدالة د قيم عظمى أو صغرى محلية عند جـ..

> **نظرية**
>
> إذا كانت د قابلة للاشتقاق على]أ ، ب[وكانت للدالة د قيمة عظمى أو صغرى محلية عند جـ ∈]أ ، ب[
> فإن د/(جـ) = ٠ أو د/(جـ) غير موجودة.

اختبار المشتقة الأولى

مثال

① إذا كان د (س) = س^{٣} + ٣س^{٢} - ٩س - ٧ أوجد القيم العظمى أو الصغرى المحلية للدالة د

الحل

١) تحديد النقط الحرجة : د متصلة وقابلة للاشتقاق

∴ د/(س) = ٣س^{٢} + ٦س - ٩

= ٣ (س^{٢} + ٢س - ٣) = ٣ (س + ٣) (س - ١)

عندما د/(س) = ٠ ∴ س = -٣ أو س = ١

لدينا نقطتان حرجتان (-٣ ، د (-٣)) ، (١ ، د (١))

أى النقطتان : (-٣ ، ٢٠) ، (١ ، -١٢)

حدد النقط الحرجة ← إبحث إشارة د/(س) ← + ← − عظمى محلية

حدد النقط الحرجة ← إبحث إشارة د/(س) ← − ← + صغرى محلية

٢) اختبار المشتقة الأولى عند كل نقطة حرجة ويوضحه جدول التغيرات المقابل

س	-∞		-٣		١		∞
إشارة د'(س)		+	٠	−	٠	+	
سلوك د(س)		↗	٢٠	↘	-١٢	↗	

٣) في جوار س = -٣ تتغير إشارة د'(س) من موجبة (قبل س = -٣) إلى سالبة (بعد س = -٣)

∴ د(-٣) = ٢٠ قيمة عظمى محلية.

وفي جوار س = ١ تتغير إشارة د'(س) من سالبة (قبل س = ١) إلى موجبة (بعد س = ١)

∴ د(١) = -١٢ قيمة صغرى محلية.

حاول أن تحل

① إذا كان د(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - ٩س + ٣ ، أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د

مثال

المشتقة الأولى غير موجودة

② أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د إذا كان د(س) = س$^{\frac{٢}{٣}}$ (٢س - ٥)

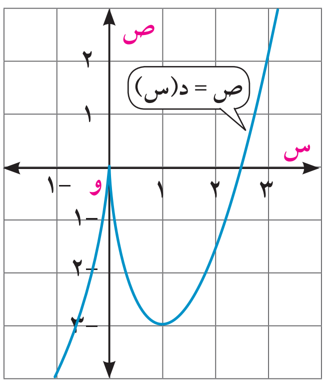
الحل

الدالة د مجالها ع ومتصلة لكل س ∈ ع

١) تحديد النقط الحرجة:

د'(س) = $\frac{٢}{٣}$ س$^{-\frac{١}{٣}}$ (٢س - ٥) + ٢ س$^{\frac{٢}{٣}}$

= $\frac{٢[٢س - ٥ + ٣س]}{٣\sqrt[٣]{س}}$ = $\frac{١٠(س - ١)}{٣\sqrt[٣]{س}}$ س ≠ ٠



∵ د متصلة عند س = ٠ ، د'(٠) غير موجودة

∴ توجد نقطة حرجة هي (٠ ، د(٠)) أي (٠ ، ٠)

عندما د'(س) = ٠ ∴ س = ١ ويوجد عندئذ نقطة حرجة هي (١ ، د(١)) أي (١ ، -٣) كما يوضحها الشكل المقابل.

٢) اختبار المشتقة الأولى عند كل نقطة حرجة يوضحه جدول تغيرات الدالة المقابل.

س	-∞		-١		١		∞
إشارة د'(س)		+	غير موجودة	−	٠	+	
سلوك د(س)		↗	-	↘	-٣	↗	

٣) عند س = ٠ توجد قيمة عظمى محلية = ٠

عند س = ١ توجد قيمة صغرى محلية = -٣

حاول أن تحل

② أثبت أن للدالة د حيث د(س) = $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ قيمة صغرى محلية.

تفكير ناقد: هل للدالة د حيث د(س) = س^{٣} + ٣س - ٤ قيم عظمى وصغرى محلية؟ فسر إجابتك.

مثال

دوال كسرية

٣) أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د حيث د(س) = س + $\frac{٤}{\text{س}}$ مبينًا نوعها

الحل

مجال د = ع - {٠}

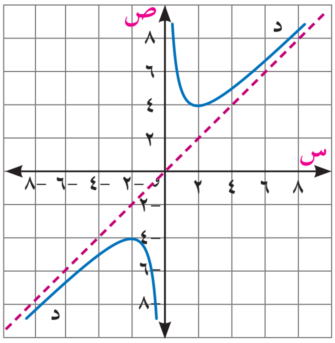
١) تحديد النقط الحرجة: د/(س) = ١ - ٤س$^{-٢}$ = $\frac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س}^٢}$ للدالة نقطتان حرجتان هما (٢، د(٢)) ، (-٢، د (-٢)) أي (٢ ، ٤) ، (-٢ ، -٤).

٢) اختبار المشتقة الأولى عند كل نقطة حرجة يوضحه جدول تغيرات الدالة المقابل (لاحظ استبعاد س = ٠ من مجال د).

س	∞-		٢-		٠		٢		∞
إشارة د/(س)		+		−	‖	−		+	
سلوك د (س)		↗	-٤	↘	‖	↘	٤	↗	

٣) عند س = -٢ توجد قيمة عظمى محلية = -٤

وعند س = ٢ توجد قيمة صغرى محلية = ٤



لاحظ أن: قد تكون القيمة العظمى المحلية أصغر من القيمة الصغرى المحلية للدالة

تكنولوجيا: يبين الشكل المقابل منحنى الدالة د باستخدام أحد البرامج الرسومية، قارن بين جدول تغيرات الدالة ومنحناها . ماذا تلاحظ؟

حاول أن تحل

٣) أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د حيث د(س) = $\frac{\text{س}^٢}{١ - \text{س}}$ مبينًا نوعها

تعلم

القيم القصوى لدالة على فترة مغلقة

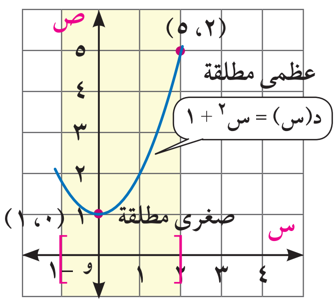
The Absalute Extrema of a Function on a Closed Interval

تعريف القيم القصوى : إذا كانت د دالة معرفة على الفترة المغلقة [أ ، ب] وكانت جـ ∈ [أ ، ب]

١) د (جـ) هي قيمة صغرى علي الفترة [أ ،ب] عندما يكون د(جـ) ≤ د(س) لكل س ∈ [أ ، ب]

٢) د (جـ) هي قيمة عظمى على الفترة [أ ، ب] عندما يكون د(جـ) ≥ د(س) لكل س ∈ [أ ، ب]

- القيمة الصغرى والقيمة العظمى لدالة على فترة تسمى القيم القصوى للدالة على هذه الفترة .
- القيمة القصوى يمكن أن تحدث عند أي نقطة داخل الفترة أو على حدود الفترة وعندما تحدث عند حدود الفترة تسمى نقطة حدية قصوى

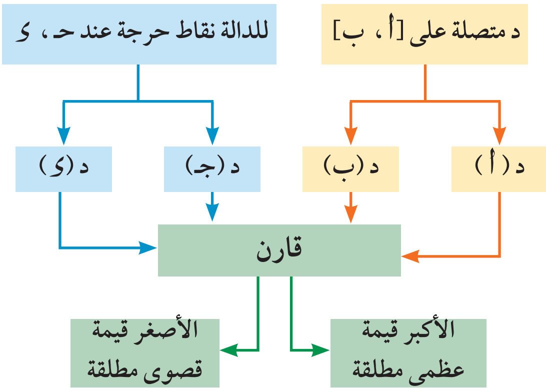


نظرية

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] فإن للدالة د قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على الفترة [أ ، ب].

لإيجاد القيم القصوى المطلقة للدالة د على الفترة المغلقة [أ ، ب] نتبع المخطط المقابل كما يلي:

- احسب د (أ) ، د (ب) ، وقيمة الدالة عند كل نقطة حرجة.
- قارن بين القيم السابقة؛ أكبر هذه القيم هو قيمة عظمى مطلقة وأصغرها هو قيمة صغرى مطلقة.



مثال

٤ أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د حيث د (س) = س^{٣} - ١٢ س + ١٢ ، س ∈ [-٣ ، ٣]

الحل

∵ د (س) = س^{٣} - ١٢ س + ١٢ ، س ∈ [-٣ ، ٣]

∴ د (-٣) = (-٣)^{٣} - ١٢(-٣) + ١٢ = ٢١ **(١)**

، د (٣) = (٣)^{٣} - ١٢(٣) + ١٢ = ٣ **(٢)**

د´(س) = ٣ س^{٢} - ١٢ = ٣ (س - ٢) (س - ٢)

لتحديد النقط الحرجة نضع د´(س) = ٠

∴ س = ٢ ∈ [-٣ ، ٣] أو س = -٢ ∈ [-٣ ، ٣]

عند س = ٢ توجد نقطة حرجة ويكون : د (٢) = -٤ **(٣)**

عند س = -٢ توجد نقطة حرجة ويكون : د (-٢) = ٢٨ **(٤)**

بمقارنة قيم ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ نجد أن:

للدالة د قيمة عظمى مطلقة = ٢٨ ، قيمة صغرى مطلقة = - ٤

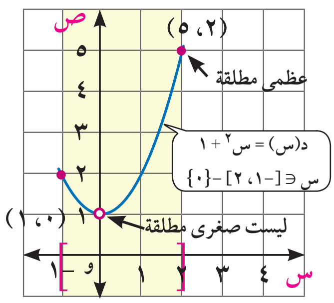
حاول أن تحل

٤ أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د

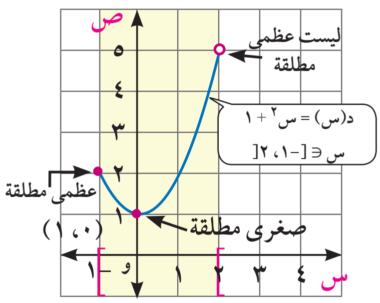
أ د (س) = ١٠س هـ$^{-س}$ س ∈ [٠ ، ٤]

ب د (س) = $\frac{٤س}{س^{٢} + ١}$ س ∈ [-١ ، ٣]

لاحظ أن



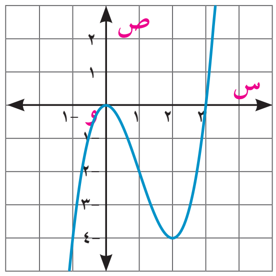
شكل (١)

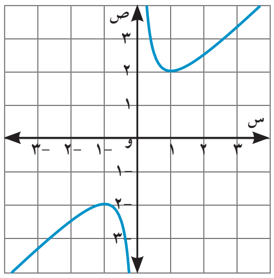


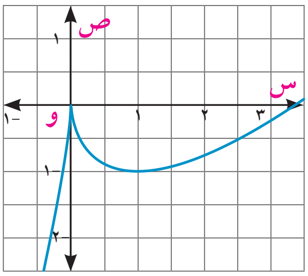
شكل (٢)

تمارين ٣ - ٢

حدد القيم العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت) للدالة د فى الأشكال التالية وبين نوعها:

(١)


(٢)


(٣)


أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت) للدالة د فى كل مما يأتى مبينًا نوعها:

(٤) د (س) = $\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} + ٢$

(٥) د (س) = $\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٢}$

(٦) د (س) = $٤\text{س} - \text{س}^{٣}$

(٧) د (س) = $٣\text{س}^{٥} - ٥\text{س}^{٣}$

(٨) د (س) = $٣ - \text{س}^{\frac{٢}{٣}}$

(٩) د (س) = $(\text{س} + ٢)^{\frac{٢}{٣}}$

(١٠) د (س) = $\text{س} + \frac{٤}{\text{س}^{٢}}$

(١١) د (س) = $\text{س} + \frac{٤}{\text{س} - ١}$

(١٢) د (س) = $\frac{٣}{\text{س} - ٢}$

(١٣) د (س) = $٤\ \text{هـ}^{-\text{س}^{٢}}$

(١٤) د (س) = $\text{هـ}^{\text{س}} (٣ - \text{س})$

(١٥) د (س) = $\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}}$

(١٦) د (س) = $\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{س}$

(١٧) د (س) = $٨\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{س} - \text{س}^{٢}$

(١٨) د (س) = $(\text{س} - ١)\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{س}$

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د على الفترة المعطاة:

(١٩) د (س) = $\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ١$ ، س ∈ [-٢ ، ١]

(٢٠) د (س) = $\sqrt{\text{س} - ١}$ ، س ∈ [٢ ، ٥]

(٢١) د(س) = جا س + جتا س ، س ∈ [٠ ، ٢π]

(٢٢) د (س) = $\text{س}\ \text{هـ}^{-\text{س}}$ ، س ∈ [٠ ، ٢]

أجب عما يلى:

(٢٣) تفكير ابداعى: أوجد قيم أ ، ب ، حـ ، ى بحيث يحقق المنحنى د (س) = $\text{أس}^{٣} + \text{ب س}^{٢} + \text{جـ س} + \text{ى}$ الشروط التالية معًا:

أ) يمر بنقطة الأصل.

ب) له نقطة حرجة عند س = ١

جـ) معادلة المماس للمنحني عند النقطة (٢ ، د (٢)) عليه هى ٩س + ص = ٢٠

٣ - ٣ رسم المنحنيات

Curve Sketching

سوف تتعلم

- تحديد فترات تحدب منحنى دالة لأعلى ولأسفل.
- إيجاد نقط الانقلاب لمنحنى دالة.
- استخدام اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم العظمى أو الصغرى المحلية.
- رسم المنحنيات.

المصطلحات الأساسية

- التحدب Convexity
- تحدب لأعلى Convex upward
- تحدب لأسفل Convex downward
- نقطة انقلاب Inflection point

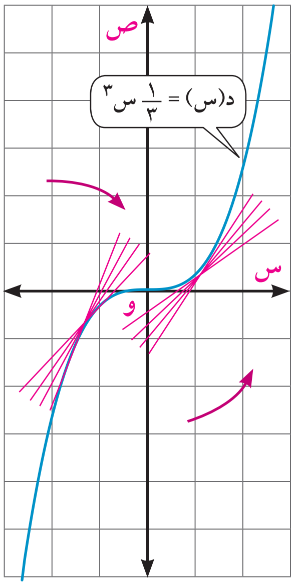
الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب

استكشف

يبين الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث:

د(س) = $\frac{1}{3}$ س^3 ، س ∈ ح



لاحظ أن الدالة د متزايدة على ح لماذا؟

هل يختلف اتجاه تقوس (تحدب) المنحنى فى الفترة]-∞ ، ٠[عن اتجاه تحدبه فى الفترة]٠ ، ∞[؟

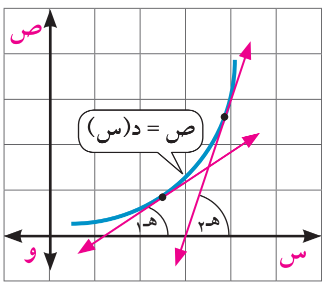
فى الفترة]-∞ ، ٠[ما موقع منحنى الدالة بالنسبة إلى جميع مماساته؟ هل يتزايد ميل المماس د′(س) أم يتناقص بزيادة قيم س؟

فى الفترة]٠ ، ∞[ما موقع منحنى الدالة بالنسبة إلى جميع مماساته؟ هل يتزايد ميل المماس د′(س) أم يتناقص بزيادة قيم س؟ ماذا تستنتج؟

تحدب المنحنيات Convexity of a curves

تعريف

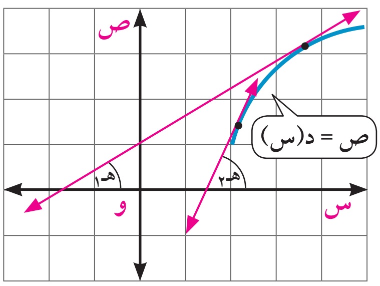
لتكن د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة]أ ، ب[، يكون منحنى الدالة د محدبًا لأسفل إذا كانت د′ متزايدة على هذه الفترة ، ومحدبًا لأعلى إذا كانت د′ متناقصة على هذه الفترة.



المنحنى محدب لأسفل

د′ متزايدة وتكون مشتقتها موجبة

أى د″(س) > ٠



المنحنى محدب لأعلى

د′ متناقصة وتكون مشتقتها سالبة

أى د″(س) < ٠

إذا كان للدالة د مشتقة ثانية غير صفرية فيمكن من خلالها دراسة تزايد وتناقص المشتقة الأولى د′ وتحديد فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل لمنحنى الدالة د.

اختبار المشتقة الثانية لتحدب المنحنيات The Second Derivative Test for Convexity

نظرية

لتكن د دالة قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة]أ ، ب[

١ - إذا كان د″ (س) > ٠ لجميع قيم س ∋]أ ، ب[فإن منحنى د يكون محدبًا لأسفل على الفترة]أ ، ب[

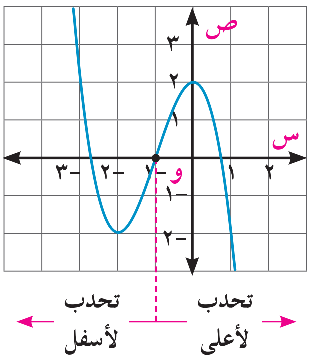
٢ - إذا كان د″ (س) < ٠ لجميع قيم س ∋]أ ، ب[فإن منحنى د يكون محدبًا لأعلى على الفترة]أ ، ب[

مثال

تحديد فترات تحدب كثيرات الحدود

① إذا كان د (س) = ٢ - ٣س^{٢} - س^{٣} عين الفترات التي يكون فيها منحنى الدالة د محدبًا لأعلى ، والفترات التي يكون فيها محدبًا لأسفل.

الحل



د متصلة وقابلة للاشتقاق لكل س ∋ ع حيث:

د′ (س) = - ٦س - ٣ س^{٢} ، د″ (س) = -٦ - ٦ س = - ٦ (١ + س)

عندما د″ (س) = ٠ ∴ س = -١

فترات التحدب: يبين الجدول المقابل إشارة د″ وفترات تحدب منحنى الدالة د لأعلى ولأسفل،

س	-∞	-١	∞
إشارة د″	+	.	−
تحدب منحنى د			

أى إن: منحنى الدالة محدب لأسفل فى الفترة]-∞ ، -١ [ومحدب لأعلى فى الفترة] -١ ، ∞[

حاول أن تحل

① حدد فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل لكل من المنحنيات التالية:

أ د(س) = س^{٢} - ٤س + ٢ ب ر(س) = س^{٤} - ٤س^{٣}

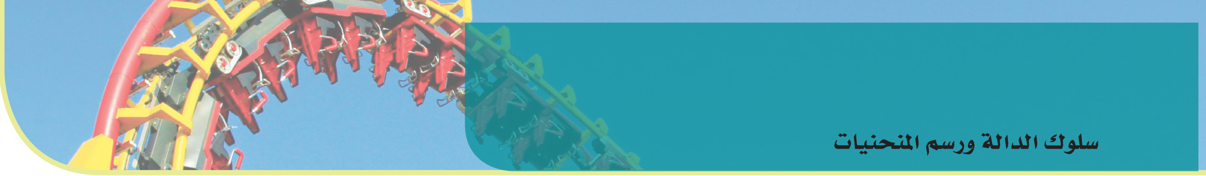
تكنولوجيا: باستخدام أحد البرامج الرسومية إرسم منحنى الدالتين د ، ر حيث ر(س) = $\sqrt[٣]{س}$ ، د(س) = س$^{\frac{٢}{٣}}$ وحدد فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل وحقق إجابتك باستخدام اختبار المشتقة الثانية .

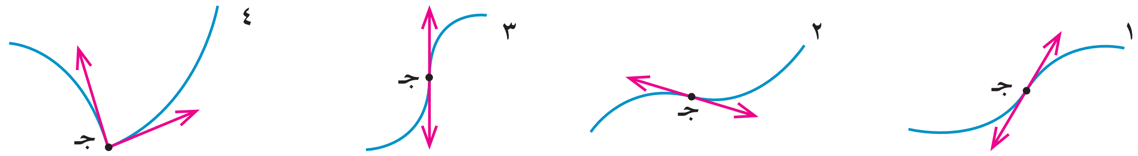
لاحظ أن: قد يتغير اتجاه تحدب منحنى الدالة المتصلة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى عند نقطة تنعدم عندها المشتقة الثانية للدالة أو تكون غير موجودة .

تعريف

نقطة الانقلاب *Inflection point*

إذا كانت د دالة متصلة على الفترة المفتوحة]أ ، ب[، جـ ∋] أ ، ب[وكان لمنحنى الدالة مماس عند النقطة (جـ، د (جـ)). فإن هذه النقطة تسمى نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د إذا تغير تحدب منحنى الدالة عند هذه النقطة من محدب لأسفل إلى محدب لأعلى أو من محدب لأعلى إلى محدب لأسفل.



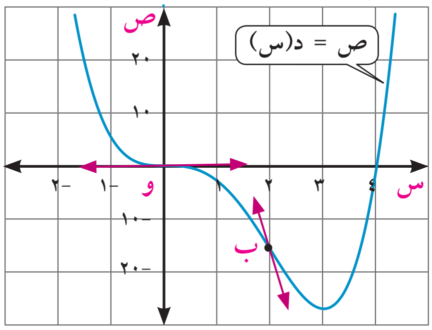


توجد نقط انقلاب للمنحنيات ١ ، ٢، ٣ لتغير اتجاه تحدب المنحنى ووجود مماس له عند جـ

لا توجد نقط انقلاب لعدم وجود مماس عند جـ

لاحظ أن:

١- المماس عند نقطة الانقلاب يقطع منحنى الدالة، لأن المنحنى فى إحدى جهتى هذه النقطة يقع تحت المماس ، وفى الجهة الأخرى يقع فوق المماس.



٢- فى **الشكل المقابل** يوجد لمنحنى الدالة د نقطتى انقلاب الأولى عند نقطة الأصل و (٠، ٠) والأخرى عند النقطة ب (٢، د(٢)).

مثال

التحدب ونقط الانقلاب

(٢) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \text{س}^2 - 4 & \text{عندما س} < -2 \\ \text{س}^3 - 3\text{س} + 2 & \text{عندما س} \geqslant -2 \end{cases}$

حدد فترات تحدب منحنى د لأعلى ولأسفل ، وأوجد نقط الانقلاب ومعادلة المماس عندها إن وجد.

الحل

الدالة د متعددة التعريف مجالها ع ، ومتصلة عند س = -٢ لأن د(-٢)$^-$ = د(-٢)$^+$ = د(-٢) = ٠

$$\text{د}'(-2^-) = \lim_{\text{هـ} \to 0^-} \frac{\text{د}(-2+\text{هـ}) - \text{د}(-2)}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0^-} \frac{(-2+\text{هـ})^2 - 4 - 0}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0^-} (\text{هـ} - 4) = -4$$

$$\text{د}'(-2^+) = \lim_{\text{هـ} \to 0^+} \frac{\text{د}(-2+\text{هـ}) - \text{د}(-2)}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0^+} \frac{(-2+\text{هـ})^3 - 3(-2+\text{هـ}) + 2 - 0}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0^+} (\text{هـ}^2 - 6\text{هـ} + 9) = 9$$

∵ د$'$(-٢$^-$) ≠ د$'$(-٢$^+$) ∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = -٢

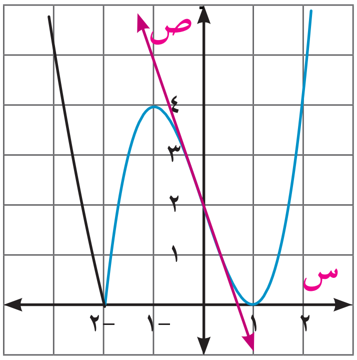
$$\text{د}'(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{س} & \text{عندما س} < -2 \\ 3\text{س}^2 - 3 & \text{عندما س} > -2 \\ \text{غير موجودة عندما س} = -2 & \end{cases}$$

[د$'$(-٢$^-$) ≠ د$'$(-٢$^+$)]

$$\text{د}''(\text{س}) = \begin{cases} 2 & \text{عندما س} < -2 \\ 6\text{س} & \text{عندما س} > -2 \end{cases}$$

يبين الجدول التالى إشارة د″ وفترات تحدب منحنى الدالة لأعلى ولأسفل.

س	$-\infty$		-٢		٠		∞
إشارة د″		+	غير موجودة	-		+	
تحدب منحنى د		∪		∩		∪	



فترات التحدب: منحنى د محدب لأسفل فى الفترة]-∞ ، -٢ [، الفترة] ٠ ،∞ [ومحدب لأعلى فى الفترة]-٢، ٠[.

نقط الانقلاب

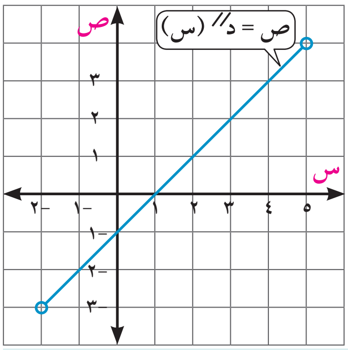
- النقطة (-٢ ، د(-٢)) أى (-٢ ، ٠) ليست نقطة انقلاب لمنحنى د رغم تغير اتجاه تحدبه حولها، لعدم وجود مماس لمنحنى الدالة عند هذه النقطة (د′(س) غير موجودة)
- النقطة (٠ ، د(٠)) أى (٠، ٢) هى نقطة انقلاب لمنحنى د لتغير اتجاه تحدبه حولها، ويوجد عندها مماس للمنحنى يقطعه فى هذه النقطة ، ميله د′(س) = -٣، ومعادلته هى : ص - ٢ = -٣ س (كما فى الرسم)

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت د (س) = $\begin{cases} (س + ٣)^{٢} & \text{عندما س} < -١ \\ ٣س^{٢} - س^{٣} & \text{عندما س} \geq -١ \end{cases}$

حدد فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل لمنحنى الدالة د ، وأوجد نقط الانقلاب ومعادلة مماس المنحنى عندها.

تفكير ناقد: يمثل الشكل المقابل منحنى د″ (س) على الفترة] -٢، ٥[للدالة المتصلة د.



- وضح فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل لمنحنى الدالة د إن وجدت.
- هل توجد نقط انقلاب لمنحنى د فى هذه الفترة ؟ فسر إجابتك.

اختبار المشتقة الثانية للقيم العظمى أو الصغرى المحلية

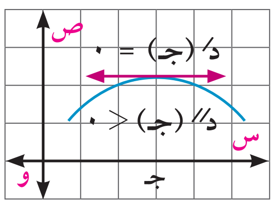
نظرية

لتكن الدالة د قابلة للاشتقاق مرتين على فترة مفتوحة تحوى جـ حيث د′(جـ) = ٠

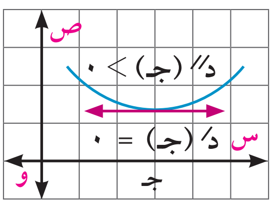
١) إذا كانت د″ (جـ) < ٠ فإن د(جـ) قيمة عظمى محلية.

٢) إذا كانت د″ (جـ) > ٠ فإن د(جـ) قيمة صغرى محلية.

٣) إذا كانت د″ (جـ) = ٠ فإن اختبار المشتقة الثانية لايستطيع تحديد نوع النقطة(جـ، د(جـ)) من حيث كونها عظمى محلية أو صغرى محلية.



د(جـ) قيمة عظمى محلية



د(جـ) قيمة صغرى محلية

مثال

③ استخدم اختبار المشتقة الثانية فى إيجاد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د حيث :
د(س) = س^{٤} - ٨س^{٢} + ١٠

الحل

د(س) كثيرة حدود فهى متصلة ومجالها ع

د′(س) = ٤س^{٣} - ١٦ س = ٤س (س^{٢} - ٤)، د″(س) = ١٢س^{٢} - ١٦

للدالة نقط حرجة عندما د′(س) = ٤س (س^{٢} - ٤) = ٠ أى عند : س = ٠ ، س = ٢ ، س = -٢

اختبار المشتقة الثانية لوجود قيم عظمى أو صغرى محلية:

عند س = ٠ د″(٠) = -١٦ > ٠ ∴ د(٠) = ١٠ قيمة عظمى محلية

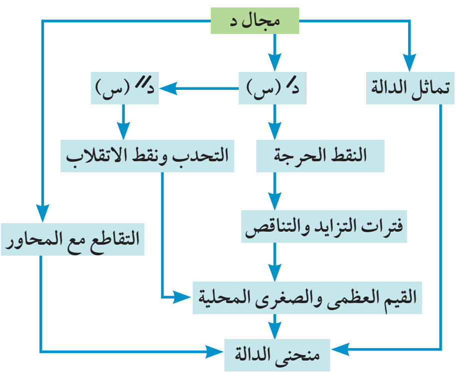
عند س = ٢ د″(٢) = ٣٢ < ٠ ∴ د(٢) = -٦ قيمة صغرى محلية

عند س = -٢ د″(-٢) = ٣٢ < ٠ ∴ د(-٢) = -٦ قيمة صغرى محلية

حاول أن تحل

③ باستخدام اختبار المشتقة الثانية أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د حيث د(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س وتحقق من صحة إجابتك باستخدام الحاسبة البيانية أو البرامج الرسومية.

رسم الشكل العام لمنحنيات كثيرات الحدود *Curve Sketching for Polynomials*



يستخدم حساب التفاضل فى رسم الشكل العام لمنحنيات الدوال، ويعتمد على تتبع سلوك د(س) للدالة د عندما تتغير قيمة س فى فترة معينة، وتمثيل الأزواج المرتبة (س ، ص) فى المستوى الإحداثى المتعامد حيث ص = د(س) وسنقصر دراستنا على رسم الشكل العام لمنحنيات الدوال على دوال كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة فأقل على الصورة د(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ى

لرسم الشكل العام لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) نتبع المخطط المقابل كما يلى:

١- إذا كانت د زوجية يكون منحناها متماثلاً بالنسبة لمحور الصادات، ويكون متماثلاً حول نقطة الأصل إذا كانت د فردية.

٢- دراسة تغيرات الدالة وتحديد فترات التحدب ونقط الانقلاب والقيم العظمى والصغرى المحلية إن وجدت.

٣- إعداد جدول التزايد والتناقص والتحدب لمعرفة الشكل العام للمنحنى ونوع النقط الحرجة.

٤- إيجاد نقط تقاطع منحنى الدالة مع محورى الإحداثيات إن امكن ذلك .

٥- رسم تخطيطى لمنحنى الدالة ويمكن الاستعانة ببعض النقط الإضافية لتحسين الرسم.

مثال
رسم منحنى دالة

④ ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٤

الحل

١- الدالة د كثيرة حدود مجالها ع ، والدالة ليست زوجية وليست فردية.

٢- د′(س) = ٣س^{٢} - ٦س = ٣س (س - ٢) ، د″(س) = ٦س - ٦ = ٦(س - ١)

للدالة نقط حرجة عند د(س) = ٠ أى عند س = ٠ ، س = ٢

وتكون د متزايدة فى الفترة] -∞ ، ٠[والفترة] ٢ ،∞ [ومتناقصة فى الفترة] ٠ ،٢[

د″(س) = ٠ عند س = ١

د″(س) > ٠ فى الفترة] -∞ ، ١[و يكون المنحنى محدبًا لأعلى فى هذه الفترة،

د″(س) < ٠ فى الفترة] ١ ، ∞ [و يكون المنحنى محدبًا لأسفل فى هذه الفترة

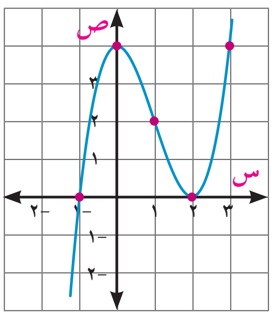
النقطة (١ ، د(١)) أى (١ ، ٢) نقطة انقلاب.

٣- جدول التزايد والتناقص والتحدب

س	∞-	٠		١		٢	∞
إشارة د′	+	٠	-		-	٠	+
سلوك د	↗		↘		↘		↗
إشارة د″	-		-	٠	+		+
تحدب د	⌢		⌢		⌣		⌣
ص		٤		٢		٠	
		قيمة عظمى محلية		نقطة انقلاب		قيمة صغرى محلية	

٤- نقط التقاطع مع محورى الإحداثيات : (٠، ٤) ، (٢، ٠)

٥- الشكل العام لمنحنى الدالة د



نقط إضافية : (-١ ، د(-١)) أى (-١ ، ٠) (٣ ، د(٣)) أى (٣ ، ٤)

حاول أن تحل

④ ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) = ١٢ س - س^{٣}

مثال
الشكل العام لمنحنى دالة

⑤ ارسم شكلاً عامًّا لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) إذا علمت مايلى:

١- د دالة متصلة مجالها [١ ، ٧] ، د(١) = -٢ ، د(٥) = ٤

٢- د′(٥) = ٠ ، د′(س) > ٠ عندما س < ٥ ، د′(س) < ٠ عندما س > ٥

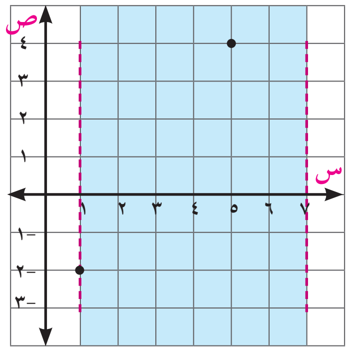
٣- د″(س) < ٠ عندما ١ < س < ٧

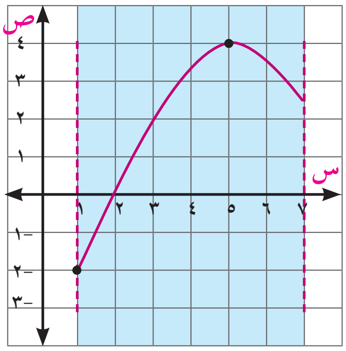
الحل

من (١): نرسم محورى الإحداثيات المتعامدة النقطتين (١، -٢) ، (٥، ٤) فى المجال [١، ٧].

من (٢): عند س = ٥ المماس // محور السينات، ود متزايدة على الفترة] ١، ٥[ومتناقصة على الفترة] ٥، ٧[

من (٣): المنحنى محدب لأعلى على] ١، ٧[





حاول أن تحل

⑤ ارسم شكلاً عامًّا لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) إذا علمت ما يلى :

١- د متصلة مجالها [٠، ∞[، د(٤) = ٣ ، د(٠) = ١   **٢-** د′(س) > ٠ عندما س > ٠

٣- د″(س) > ٠ عندما س < ٤ ، د″(٤) = ٠ ، د″(س) < ٠ عندما س > ٤

مثال

حل معادلات

⑥ إذا كانت النقطة (١، ١٢) هى نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د حيث د(س) = أس^{٣} + ب س^{٢} فأوجد قيم أ ، ب الحقيقية.

الحل

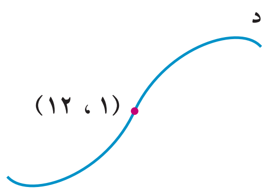
∵ النقطة (١ ، ١٢) نقطة انقلاب لمنحنى د

∴ د″(١) = ٠   (١)   ،   د(١) = ١٢   (٢)

د′(س) = ٣ أس^{٢} + ٢ ب س   ،   د″(س) = ٦ أس + ٢ ب

من (١): ٦أ + ٢ ب = ٠   ∴ ب = - ٣أ

من (٢): أ + ب = ١٢   ∴ أ - ٣أ = ١٢   ويكون أ = -٦ ، ب = ١٨



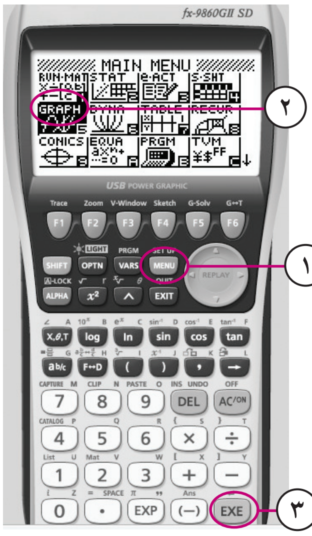
حاول أن تحل

⑥ إذا كانت النقطة (٢، ٢) هى نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س فأوجد قيم أ ، ب الحقيقية.

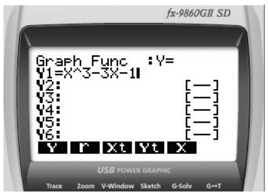
نشاط

استخدام الحاسبة البيانية فى رسم الدوال.

لاستخدام الحاسبة البيانية فى رسم منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^{٣} - ٣س + ١$ اتبع الخطوات التالية:



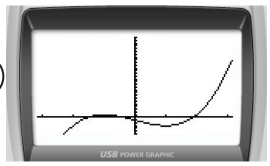
١- افتح الحاسبة واضغط MENU ثم تحرك بالأسهم على الشاشة واختر GRAPH،
اضغط EXE الذى يعد مفتاح الإدخال لتظهر لك نافذة الكتابة .



٢- اكتب عند Y1 فى نافذة الكتابة الدالة المراد رسمها حيث يستخدم مفتاح لكتابة المتغير X ولذلك اضغط على المفاتيح التالية :

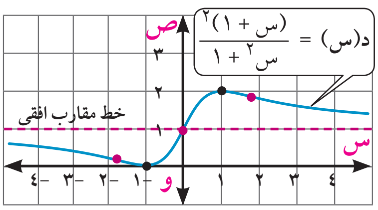
ابدأ ← T, θ, X ^ 3 – 3 T, θ, X + 1

٣- لرسم الدالة اضغط EXE ▲ EXE ← ابدأ
فتظهر النافذة الرسومية كما بالشكل المقابل.



٤- استخدم مفتاح ◈ فى النافذة الرسومية لدراسة سلوك الدالة وتحديد فترات التحدب إلى أعلى والتحدب إلى أسفل.

تكنولوجيا: بعض الدوال يصعب رسم منحناها البيانى. يمكنك باستخدام برنامج geogebra أو أى برنامج رسومى آخر رسم منحنى الدالة ودراسة خواصه.



يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث $د(س) = \frac{(س + ١)^{٢}}{س^{٢} + ١}$،

لاحظ:

١) **النقط الحرجة:** للمنحنى نقط حرجة عند س = -١ ، س = ١

عند س = -١ د(-١) = ٠ قيمة صغرى محلية، عند س = ١ د(١) = ٢ قيمة عظمى محلية.

٢) **فترات التحدب:** إلى أعلى:]-∞ ، $-\sqrt{٣}$[،]٠ ، $\sqrt{٣}$[، إلى أسفل:]$-\sqrt{٣}$ ، ٠[،]$\sqrt{٣}$ ، ∞[

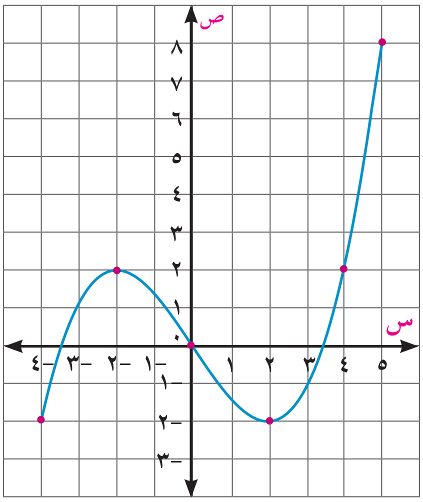
٣) **نقطة الانقلاب:** عند س = $-\sqrt{٣}$ يوجد مماس يقطع منحنى د ، عند س = $\sqrt{٣}$ يوجد مماس يقطع منحنى د

٤) **الشكل العام للمنحنى:** منحنى الدالة يقترب بطرفيه من المستقيم ص = ١ و يعرف بخط التقارب الأفقى لمنحنى الدالة ومعادلته ص = أ حيث: أ = $\lim_{|س| \to \infty} د(س) = \lim_{|س| \to \infty} \frac{(س + ١)^{٢}}{س^{٢} + ١} = ١$

تطبيق: ارسم منحنى الدالتين بأحد البرامج الرسومية ثم ادرس خواص كل منهما:

$د(س) = \frac{٤س^{٢}}{س^{٢} + ٣}$ ، $ر(س) = \frac{س^{٢} - ٤س}{س^{٢} - ٤س + ٣}$

تمـــاريـن ٣ – ٣



(١) يبين الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث ص = د(س)، اكمل:

أ) مجال د = ...

ب) د\(س) = ٠ عندما س ∋ ....

جـ) د\\(س) > ٠ عندما س ∋ ....

د) المنحنى محدب لأعلى عندما س ∋ ....

هـ) للمنحنى نقطة انقلاب هي ....

و) للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ...

ز) للدالة قيمة عظمى مطلقة تساوى ....

ابحث فترات تحدب الدالة د ثم أوجد إحداثيات نقط الانقلاب (إن وجدت) لكل ممايأتى:

(٢) د (س) = ٤ - ٦ س - ٣س^{٢}

(٣) د(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ١

(٤) د(س) = ١٥س + ٦ س^{٢} - س^{٣}

(٥) د(س) = س^{٤} - ٨س^{٢} + ١٦

(٦) د(س) = $\frac{٦}{س^{٢} + ٣}$

(٧) $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} - ٤}$

(٨) ٣

(٩) د(س) = $\begin{cases} س^{٣} - ٣س \text{ عندما } س < ٠ \\ ٤س - س^{٢} \text{ عندما } س \geqslant ٠ \end{cases}$

(١٠) أثبت أن قياس زاوية ميل المماس عند نقطة الانقلاب لمنحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{س}{١ - س^{٢}}$ يساوى $\frac{\pi}{٤}$

(١١) إذا كان لمنحنى الدالة د حيث د(س) = س (س - ٣)^{٢} قيمة عظمى محلية عند س$_{١}$ ، وقيمة صغرى محلية عند س$_{٢}$ فأثبت أن الإحداثى السينى لنقطة الانقلاب = $\frac{س_{١} + س_{٢}}{٢}$

(١٢) أوجد أ ، ب بحيث يكون للمنحنى س^{٢} ص + أ ص + ب س^{٢} = ٠ نقطة انقلاب عند النقطة (١ ، -١).

ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة د الذى له الخواص المعطاة فى كل مما يأتى:

(١٣) د(٠) = ٤ د(٣) = ٤ ، د\(س) > ٠ لكل س > ٢ ، د\(س) < ٠ لكل س < ٢ ، د\\(س) > ٠

(١٤) د(١) = د(٥) = ٠ ، د\(س) > ٠ لكل س > ٣ ، د\(س) < ٠ لكل س < ٣ ، د\\(س) > ٠ لكل س ≠ ٣

(١٥) د(-١) = ٢ د(٠) = ٤ ، د(١) = ٠ ، د\(١) = د\(-١) = ١ ، د\\(س) > ٠ لكل س > ٠ ، د\\(س) < ٠ لكل س < ٠

(١٦) د(٣) = ٤ ، عند س > ٣ فإن د\(س) < ٠ ، د\\(س) < ٠ وعند س < ٣ فإن د\(س) > ٠ ، د\\(س) < ٠

ادرس تغيرات الدالة د وارسم الشكل العام لمنحناها فى كل مما يأتى:

(١٧) د(س) = س^{٢} - ٦س + ٥

(١٨) د(س) = ٣ - س^{٢}

(١٩) د(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣

(٢٠) د(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - س + ٢

(٢١) د(س) = $\frac{١}{٨}$ س^{٣} - $\frac{٣}{٢}$ س + ١

(٢٢) د(س) = - س (س - ٣)^{٢}

(٢٣) د(س) = (٢ - س) (س + ١)^{٢}

(٢٤) د(س) = $\frac{١}{٨}$ (س + ٤) (س - ٢)^{٢}

(٢٥) د(س) = { س^{٣} - ٣س^{٢} عندما س > ٠
س^{٢} - ٢س عندما س ≤ ٠

(٢٦) د(س) = س |س - ٤|

تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

Applications of Maxima and Minima

سوف تتعلم
- النمذجة الرياضية

المصطلحات الأساسية
- نمذجة رياضية Mathematical Modeling

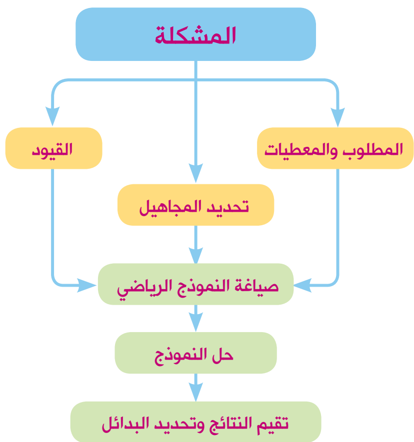
الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

النمذجة الرياضية Mathematical Modeling

إن عملية اتخاذ قرار علمى فى حل أى مشكلة تمر بعدة مراحل تتلخص فى:

١- تحديد المشكلة (الهدف والإمكانات).
٢- وضع نموذج فكرى أو تصور لأبعاد المشكلة.
٣- إيجاد نموذج علمى مناسب.
٤- حل النموذج واتخاذ القرار.

والنمذجة الرياضية هى صياغة مشكلة ما وفق علاقات رياضية يطلق عليها النموذج الرياضى، **ويتلخص فى المخطط المقابل حيث يتضمن :**



١- تحديد المشكلة المطروحة غايتها ومكوناتها (ربح أعظم - تكلفة أقل - مساحة أكبر ...)
٢- تحديد مجاهيل المسألة التى يجب إيجاد قيمها للوصول إلى الغاية المطلوبة.
٣- بيان العلاقات بين المجاهيل (معادلات - متباينات).
٤- صياغة النموذج الرياضى وهو تمثيل للمشكلة بصورة رياضية قابلة للحل.
٥- حل النموذج الرياضى وتفسير نتائجه وفق طبيعة المسألة .
٦- تحديد البدائل المتاحة إذا كان للمسألة أكثر من حل واحد.

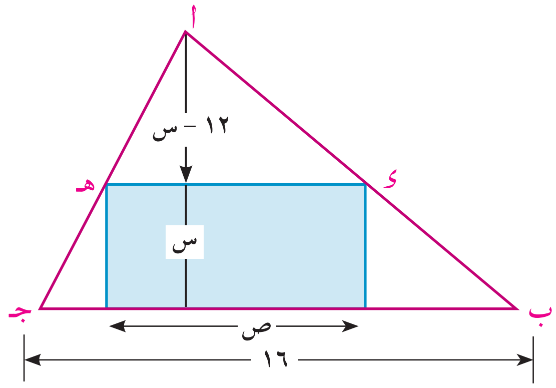
ويسهم حساب التفاضل فى حل النموذج الرياضى لمعظم مشكلات الحياة العملية حين يكون الهدف هو الحصول على أكبر قيمة أو أصغر قيمة لمتغير ما فى إطار القيم القصوى المحلية والقيم القصوى المطلقة كما فى الأمثلة التالية.

مثال
اختبار المشتقة الأولى

١ أوجد بعدى مستطيل له أكبر مساحة يمكن رسمه داخل مثلث، طول قاعدته ١٦سم وارتفاعه ١٢سم، بحيث ينطبق بأحد أضلاعه على قاعدة المثلث وتقع رأسا الضلع المقابل على الضلعين الآخرين للمثلث.

الحل

١- لحساب أكبر مساحة نرسم المسألة تبعًا للمعطيات والقيود .
٢- تحديد المتغيرات (المجاهيل) بفرض أن عرض المستطيل = س سم وطوله ص سم ومساحته = م سم^٢



٣- العلاقات بين المتغيرات (النموذج الرياضى)

مساحة المستطيل م = س × ص

٤- وضع النموذج الرياضى فى متغير واحد إن أمكن

$\frac{ص}{١٦} = \frac{أى}{أب} = \frac{١٢ - س}{١٢}$ (من التشابه)

$\therefore$ ص = $\frac{٤}{٣}$ (١٢ - س)، س $\in$]٠، ١٢[(١)

مساحة المستطيل م = $\frac{٤}{٣}$ س (١٢ - س)

أى إن: م = د(س) = ١٦ س - $\frac{٤}{٣}$ س^{٢} (٢)

٥- حل النموذج الرياضى: باشتقاق طرفى العلاقة (٢) بالنسبة إلى س

$\therefore$ د$'$(س) = ١٦ - $\frac{٨}{٣}$ س ، د$''$(س) = - $\frac{٨}{٣}$

عند د$'$(س) = ٠ $\therefore$ س = $\frac{١٦ \times ٣}{٨}$ = ٦ ويكون عندها د$''$(س) < ٠

$\because$ م لها نقطة حرجة وحيدة عند س = ٦ ، والمشتقة الثانية سالبة دائمًا ، فإن هذه النقطة الحرجة تعطى القيمة العظمى المطلقة.

$\therefore$ للدالة م قيمة عظمى مطلقة عند س = ٦ ، ص = $\frac{٨}{٣}$ (١٢ - ٦) = ٨

أى إن: للمستطيل أكبر مساحة عندما يكون بعداه ٦سم ، ٨سم

حاول أن تحل

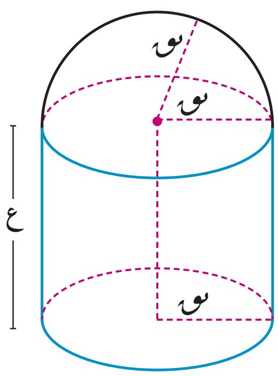
(١) أوجد أكبر مساحة لمثلث متساوى ساقين يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها ١٢سم.

مثال

حساب أقل تكلفة

(٢) يراد بناء صومعة حبوب على شكل أسطوانة رأسية ذات سقف نصف كُروى بحيث تتسع لتخزين ١٠٨πم^{٣} من الحبوب (بفرض أن تخزين الحبوب يتم فى الجزء الأسطوانى فقط دون السقف)، إذا كانت تكلفة وحدة المساحة من السقف ضعف تكلفة وحدة المساحة من الجدار الجانبى. ما أبعاد الصومعة التى تجعل التكلفة أقل ما يمكن؟

الحل



١- لحساب أقل تكلفة نرسم المسألة تبعًا للمعطيات والقيود.

٢- **تحديد المتغيرات**: نفرض أن ارتفاع الأسطوانة = ع مترًا، طول نصف قطر قاعدتها = نق مترًا وأن تكلفة وحدة المساحة من الجدار = جـ جنيهًا فتكون تكلفة وحدة المساحة من السقف = ٢ جـ جنيهًا والتكاليف الكلية = ك جنيهًا.

٣- **العلاقات بين المتغيرات (النمذجة):**

مساحة السطح الأسطوانى = محيط القاعدة × الارتفاع = ٢ π نق ع وحدة مساحة

مساحة السطح النصف كرى = $\frac{١}{٢}$ مساحة الكرة = ٢πنق^{٢} وحدة مساحة

التكاليف الكلية ك = ٢πنق ع × جـ + ٢πنق^{٢} × ٢ جـ = ٢πنق جـ (ع + ٢نق)

٤- وضع النموذج الرياضى فى متغير واحد:

$\because$ حجم الجزء الأسطوانى = ١٠٨π $\therefore$ πنق^{٢}ع = ١٠٨π **أى إن** ع = $\frac{١٠٨}{نق^{٢}}$

التكاليف الكلية ك = ٢πنق جـ $(\frac{١٠٨}{نق^{٢}} + ٢نق)$

ك = د(نق) = ٢١٦π جـ نق$^{-١}$ + ٤π جـ نق^{٢}

٥- حل النموذج: د$'$(نق) = -٢١٦π جـ نق$^{-٢}$ + ٨π جـ نق

النقط الحرجة = عند د$'$(نق) = ٠ $\therefore$ نق^{٣} = $\frac{٢١٦}{٨}$ **أى إن** نق = ٣(نقطة وحيدة)

اختبار المشتقة الثانية:

$\because$ د$''$(نق) = ٤٣٢π جـ نق$^{-٣}$ + ٨π جـ $\therefore$ د$''$(٣) > ٠

أى إن: عندما يكون طول نصف قطر الأسطوانة الرأسية ٣ أمتار يكون للصومعة أقل تكاليف، ويكون ارتفاعها عندئذ $\frac{١٠٨}{٩}$ = ١٢ مترًا.

حاول أن تحل

(٢) خزان على شكل صندوق مغلق سعته ٢٥٢ مترًا مكعبًا، وقاعدته مربعة. يراد طلاؤه من الداخل بمادة عازلة، يتكلف القاع ٥٠ جنيهًا لكل متر مربع، ويتكلف الغطاء ٢٠ جنيهًا لكل متر مربع، كما يتكلف الجوانب ٣٠ جنيهًا لكل متر مربع، أوجد أبعاد الصندوق التى تجعل التكلفة أقل ما يمكن.

مثال

تطبيقات حياتية

(٣) جدار ارتفاعه ٢ متر ويبعد مترين عن أحد المنازل، أوجد طول أقصر سلم يصل من الأرض إلى المنزل مرتكزًا على الجدار.

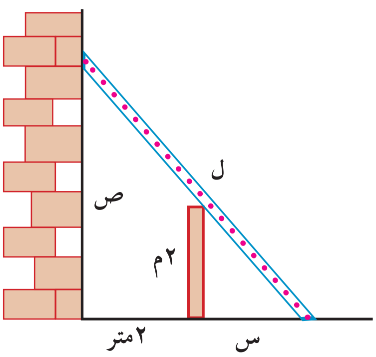
الحل

١- لحساب أقصر طول للسلم نرسم المسألة تبعًا للمعطيات والقيود.

٢- تحديد المتغيرات: نفرض أن:

طول السلم = ل مترًا، ارتفاع قمة السلم عن الأرض = ص مترًا، بعد طرف السلم السفلى عن الجدار = س مترًا.

٣- نمذجة المسألة:



من فيثاغورث: ل^{٢} = (س + ٢)^{٢} + ص^{٢} (١)

من التشابه: $\frac{ص}{٢} = \frac{س + ٢}{س}$

$\therefore$ ص = $\frac{٢س + ٤}{س}$ = ٢ + ٤ س$^{-١}$ (٢)

لإيجاد أقصر طول للسلم يكفى أن تكون ل^{٢} قيمة صغرى

٤- حل النموذج باشتقاق طرفى العلاقة (١) ، (٢) بالنسبة إلى س.

$\therefore$ $\frac{ء}{ءس}$(ل^{٢}) = ٢ (س + ٢) × ١ + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ ، $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٤}{س^{٢}}$

$\therefore \frac{ء}{ءس}(ل^٢) = ٢(س+٢) + ٢\left(\frac{٢س+٤}{س}\right) \times \frac{-٤}{س^٢} = ٢(س+٢)\left(١ - \frac{٨}{س^٣}\right)$

عند النقط الحرجة: $\frac{ء}{ءس}(ل^٢) = $ صفر

$\therefore$ س = -٢ مرفوض أو $\frac{٨}{س^٣} = ١$

$\therefore$ س = ٢

س		٢	
إشارة $\frac{ء}{ءس}(ل^٢)$	−		+
$ل^٢$	↘		↗

من اختبار المشتقة الأولى للتزايد والتناقص نلاحظ تغير إشارة $\frac{ء}{ءس}(ل^٢)$ من - إلى +

$\therefore$ عند س = ٢ تكون $ل^٢$ أصغر ما يمكن

بالتعويض فى (٢) $\therefore$ ص = $\frac{٢ \times ٢ + ٤}{٢} = ٤$

بالتعويض فى (١)

$\therefore ل^٢ = (٢+٢)^٢ + (٤)^٢ = ٣٢$ $\qquad$ $\therefore ل = ٤\sqrt{٢}$

أى إن: طول أقصر سلم يصل من الأرض إلى المنزل يساوى $٤\sqrt{٢}$ مترًا

حاول أن تحل

٣) فى مستوى إحداثى متعامد رسم $\overleftrightarrow{أب}$ يمر بالنقطة جـ (٣ ، ٢) ويقطع محورى الإحداثيات فى النقطة أ والنقطة ب ، أثبت أن أصغر مساحة للمثلث أ و ب تساوى ١٢ وحدة مربعة حيث و نقطة الأصل (٠ ، ٠).

مثال

القطاع الدائرى

٤) قطعة معدنية على شكل قطاع دائرى مساحته ١٦سم^٢ أوجد طول نصف قطر دائرة القطاع الذى يجعل محيطه أقل ما يمكن، وما قياس زاويته عندئذ؟

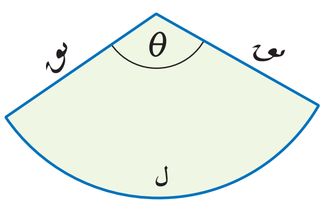
الحل

بفرض أن طول قوس القطاع ل سم ، طول نصف قطر دائرة القطاع = نق سم

$\therefore$ محيط القطاع ع = ٢ نق + ل $\qquad$ (١)

$\because$ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق = ١٦ $\qquad$ $\therefore$ ل = $\frac{٣٢}{نق}$ $\qquad$ (٢)

بالتعويض فى (١) $\therefore$ ع = ٢ نق + $\frac{٣٢}{نق}$



باشتقاق طرفى العلاقة (٢) بالنسبة إلى نق

$\frac{ءع}{ءنق} = ٢ - \frac{٣٢}{نق^٢}$ ، $\frac{ء^٢ع}{ءنق^٢} = \frac{٦٤}{نق^٣}$

عندما $\frac{ءع}{ءنق} = ٠$ $\qquad$ نق = ٤ ، $\frac{ء^٢ع}{ءنق^٢} > ٠$

$\therefore$ عند نق = ٤ يكون محيط القطاع أقل ما يمكن

$\because$ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق$^٢ \theta^ء$ $\qquad$ $\therefore \theta = \frac{١٦ \times ٢}{٤ \times ٤} = ٢ء$

حاول أن تحل

٤) إذا كان محيط قطاع دائرى = ١٢سم، أوجد قياس زاوية القطاع الذى يجعل مساحته أكبر ما يمكن.

تمارين ٣ - ٤

(١) عددان مجموعهما ٣٠ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن، أوجد العددين.

(٢) عددان صحيحان موجبان مجموعهما ٥، ومجموع مكعب أصغرهما وضعف مربع الآخر أصغر ما يمكن، أوجد العددين.

(٣) أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف إليه معكوسه الضربى كان الناتج أصغر ما يمكن.

(٤) أوجد أكبر مساحة من الأرض مستطيلة الشكل يمكن أن تُحاط بسياج طوله ١٢٠ مترًا.

(٥) قطاع دائرى محيطه ٣٠سم، ومساحته أكبر ما يمكن، أوجد طول نصف قطر دائرته.

(٦) علبة على هيئة متوازى مستطيلات، قاعدتها مربعة الشكل . إذا كان مجموع جميع أحرفها يساوى ٢٤٠سم، فأوجد أبعادها حتى يصير حجمها أكبر ما يمكن.

(٧) إذا كان طول وتر مثلث قائم الزاوية يساوى ١٠سم، فأوجد طول كل من ضلعى القائمة عندما تصبح مساحة المثلث أكبر ما يمكن.

(٨) حقل مفتوح يحدُّه من أحد الجوانب نهر مستقيم . حدد كيفية وضع سياج حول الجوانب الأخرى من قطعة أرض مستطيلة من الحقل للإحاطة بأكبر مساحة ممكنة بواسطة ٨٠٠ متر من السياج، وما مساحة هذه الأرض حينئذ؟

(٩) تُصَنْع علب أسطوانية الشكل مغلقة لتعبئة المشروبات، سعة كل منهما ك من وحدات الحجم بأقل قدر من المادة ، أوجد نسبة ارتفاع العلبة (ع) إلى طول نصف قطر قاعدتها (نق).

(١٠) ملعب على شكل مستطيل ينتهى بنصفى دائرتين، إذا كان محيط الملعب ٤٢٠ مترًا، فأوجد أكبر مساحة له.

(١١) مثلث قائم الزاوية طول وتره ٣٠سم ، أوجد طول كل من ضلعيه الآخرين إذا كان طول العمود النازل من رأس الزاوية القائمة على الوتر أكبر ما يمكن.

(١٢) قطعة من الورق المقوى على شكل مستطيل، بعداه ١٥سم ، ٢٤سم، قُطِعَ من أركانها الأربعة مربعات متطابقة، طول ضلع كل منها س سم، ثم ثُنِيت الأجزاء البارزة لأعلى لتكون علبة بدون غطاء . احسب أبعاد العلبة عندما يكون لها أكبر حجم ممكن.

(١٣) خزان مفتوح، قاعدته مربعة، وجوانبه رأسية، يسع كمية معينة من الماء . أثبت أن تكاليف طلاء الخزان من الداخل بطبقة منتظمة عازلة تكون أقل ما يمكن إذا كان عمقه يساوى نصف طول ضلع قاعدته.

(١٤) أوجد أقرب نقطة إلى النقطة (٠، ٥) وتقع على المنحنى $ص = \frac{١}{٢} س^{٢} - ٤$.

(١٥) أوجد أقصر بعد بين المستقيم $س - ٢ص + ١٠ = ٠$ والمنحنى $ص^{٢} = ٤س$.

(١٦) أ ب جـ مثلث حيث أَ ، بَ ثابتان . أوجد قياس الزاوية المحصورة بينهما والتى تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.

(١٧) تُعطى شدة التيار ت (بالأمبير) فى دائرة للتيار المتردد عند أى لحظة ن (ثانية) بالعلاقة ت = ٢ جتا ن + ٢ جا ن، ما أقصى قيمة للتيار فى هذه الدائرة.

(١٨) ينمو حجم مزرعة بكتيريا موضوعة فى وسط غذائى طبقًا للعلاقة د(ن) = ٢٠٠٠ + $\frac{\text{٥٠٠٠ ن}}{\text{١٠٠ + ن}^{\text{٢}}}$ ، حيث الزمن ن مقيس بالساعات ، عين القيمة العظمى لحجم المزرعة.

(١٩) أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٠سم ، م ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث ب م = س سم ، ن ∈ $\overline{\text{جـ ء}}$ بحيث جـ ن = $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ س . أوجد قيمة س التى تجعل مساحة △ أ م ن أصغر ما يمكن.

(٢٠) $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى دائرة طول نصف قطرها نق رُسم مماسان للدائرة عند كل من أ ، ب من النقطة هـ على الدائرة رسم مماس آخر للدائرة قطع المماسين السابقين من ء ، جـ على الترتيب . أثبت أن أصغر مساحة لشبه المنحرف أ ب جـ ء تساوى ٢نق$^{\text{٢}}$ وحدة مربعة.

ملخص الوحدة

اختبار المشتقة الأولى لاضطراد الدوال:

نظرية: لتكن د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة]أ ، ب[:

١- اذا كان د/(س) > . لجميع قيم س ∈]أ ، ب[فإن د متزايدة على]أ ، ب[.

٢- إذا كان د/(س) <. لجميع القيم س∈]أ ، ب[فإن د متناقصة على]أ ، ب[.

النقطة الحرجة:

للدالة د المتصلة على]أ ، ب[نقطة حرجة (جـ ، د (جـ)) إذا كانت جـ ∈]أ ، ب[، د/(جـ) = ٠ أو د/(جـ) غير موجودة.

القيم العظمى والقيم الصغرى المطلقة (القيم القصوى المطلقة):

إذا كانت د دالة متصلة مجالها ف ، جـ ∈ ف فإنه يوجد للدالة د:

١- قيمة عظمى محلية عند جـ إذا وجدت فترة مقترحة]أ ، ب[⊂ ف تحوى جـ بحيث يكون د(س) ≥ د (حـ) لكل س ∈]أ ، ب[.

٢- قيمة صغرى محلية عند جـ إذا وجدت فترة مفتوحة] أ ، ب [⊂ ف تحوى جـ بحيث يكون د (س) ≤ د (حـ) لكل س ∈]أ ، ب[.

اختبار المشتقة الأولى للقيم العظمى و الصغرى المحلية:

إذا كانت (جـ ، د (جـ)) نقطة حرجة للدالة د المتصلة عند جـ ، ووجدت فترة مفتوحة حول جـ بحيث:

١- د/(س) > ٠ عندما س < جـ ، د/(س) < ٠ عندما س > جـ ، فإن د (جـ) قيمة عظمى محلية

٢- د/(س) < ٠ عندما س < جـ ، د/(س) > ٠ عندما س > جـ ، فإن د (جـ) قيمة صغرى محلية

نظرية: إذا كانت د قابلة للاشتقاق على]أ ، ب[وكانت للدالة د قيمة عظمى أو صغرى محلية عند جـ ∈]أ ، ب[فإن د/(جـ) = ٠

القيم القصوى لدالة على فترة مغلقة:

نظرية: إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] فإن للدالة د قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على الفترة [أ ، ب].

تحدب المنحنيات

لتكن د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة]أ ، ب[، يكون منحنى الدالة د محدبًا لأسفل إذا كانت د/ متزايدة على هذه الفترة ، ومحدبًا لأعلى إذا كانت د/ متناقصة على هذه الفترة .

اختبار المشتقة الثانية لتحدب المنحنيات

نظرية: لتكن د دالة قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة]أ ، ب[فإنه:

١- إذا كان د//(س) > ٠ لجميع قيم س ∈]أ ، ب[فإن منحنى د يكون محدبًا لأسفل على الفترة]أ ، ب[.

٢- إذا كان د″(س) < ٠ لجميع قيم س∈]أ ، ب[فإن منحنى د يكون محدبًا لأعلى على الفترة]أ ، ب[.

نقطة الانقلاب

إذا كانت د دالة متصلة على الفترة المفتوحة]أ ، ب[، جـ ∈] أ ، ب[وكان لمنحنى الدالة مماس عند النقطة (جـ، د (جـ)). فإن هذه النقطة تسمى نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د إذا تغير تحدب منحنى الدالة عند هذه النقطة من محدب لأسفل إلى محدب لأعلى أو من محدب لأعلى إلى محدب لأسفل.

اختبار المشتقة الثانية للقيم العظمى و الصغرى المحلية

نظرية: ليكن للدالة د مشتقة ثانية على فترة مفتوحة تحوى جـ حيث د′(جـ) = ٠

١- إذا كانت د″(جـ) < ٠ فإن د(جـ) قيمة عظمى محلية.

٢- إذا كانت د″(جـ) > ٠ فإن د(جـ) قيمة صغرى محلية.

منحنيات كثيرات الحدود

لرسم الشكل العام لمنحنى كثيرة الحدود د حيث ص = د(س) نتبع الخطوات التالية:

١- إذا كانت د زوجية يكون منحناها متماثلًا بالنسبة لمحور الصادات، و يكون متماثلاً بالنسبة لنقطة الأصل إذا كانت د فردية.

٢- دراسة تغيرات الدالة وتحديد فترات التحدب ونقط الانقلاب والقيم العظمى و الصغرى المحلية إن وجدت.

٣- إعداد جدول التزايد والتناقص والتحدب لمعرفة الشكل العام للمنحنى ونوع النقط الحرجة.

٤- إيجاد نقط تقاطع منحنى الدالة مع محورى الإحداثيات .

٥- رسم تخطيطى لمنحنى الدالة و يمكن الاستعانة ببعض النقط الإضافية لتحسين الرسم.

تمارين عامة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كان د: [-٢، ٤] ⟵ ع ، د(س) = س^{٣} - ٣س فإن عدد النقط الحرجة للدالة د يساوى:

أ ٠ ب ١ ج ٢ د ٣

(٢) يكون للدالة د قيمة صغرى محلية إذا كانت د(س) تساوى:

أ ٢ س -١ ب س^{٢} + ١ ج س^{٣} د - س^{٣}

(٣) منحنى الدالة د محدبًا لأسفل فى ع إذا كان د(س) تساوى:

أ ٣ - س^{٢} ب ٣ - س^{٣} ج ٣ - س^{٤} د ٣ + س^{٤}

(٤) إذا كان لمنحنى الدالة د نقطة إنقلاب عند س = ٢ حيث د(س) = س^{٣} + ك س^{٢} + ٤ فإن قيمة ك تساوى:

أ -٦ ب -٣ ج ٣ د ٦

(٥) يكون للدالة د قيمة عظمى محلية إذا كانت د(س) تساوى:

أ س^{٢} - ٢ ب س^{٣} + ١ ج س^{٣} + ٣س د س^{٤} - ٢س^{٢}

حدد فترات تزايد وفترات تناقص الدالة د فى كل مما يأتى:

(٦) د(س) = (س - ٣)^{٢} (٧) د(س) = ٢س^{٣} - س^{٢} (٨) د(س) = (س + ٤)^{٣}

(٩) د(س) = ٥ + ٤ س - س^{٢} (١٠) د(س) = س^{٢} (س - ٢) (١١) د(س) = س^{٤} - ٤س^{٣}

(١٢) د(س) = ١ + $\frac{١}{س}$ (١٣) د(س) = $\frac{س}{س + ٢}$ (١٤) د(س) = $\sqrt[٣]{س - ١}$

حدد فترات التحدب لأسفل و التحدب لأعلى ونقط الانقلاب إن وجدت لكل من:

(١٥) د(س) = (س - ١)^{٢} (١٦) د(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} (١٧) د(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ٩

(١٨) د(س) = س^{٣} - ١٢س + ٧ (١٩) د(س) = ٦س^{٣} - س^{٤} (٢٠) د(س) = س^{٢} - $\frac{٨}{س}$

أوجد القيم القصوى المحلية للدالة د إن وجدت فى كل مما يأتى:

(٢١) د(س) = ٤ - ٦س - س^{٢} (٢٢) د(س) = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} + ٧ (٢٣) د(س) = س(س - ٢)^{٢}

(٢٤) د(س) = س^{٤} - ٨س^{٢} + ٨ (٢٥) د(س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + ١}$ (٢٦) د(س) = $\frac{س^{٢} - ٣}{س - ٢}$

(٢٧) د(س) = $\frac{س - ٤}{س^{٢} + ٩}$ (٢٨) د(س) = $\sqrt[٣]{(س - ٢)^{٢}}$ (٢٩) د(س) = $\sqrt[٣]{س^{٢} - ٤}$

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د فى الفترة المعطاه لكل مما يأتى:

(٣٠) د(س) = س^{٣} - ٩ [٠ ، ٢] (٣١) د(س) = س^{٣} - ١٢ س + ١٦ [-٣ ، ٥]

(٣٢) د(س) = س^{٤} + ٢ [-١ ، ٢] (٣٣) د(س) = ٢س^{٤} - س^{٢} + ١ [-١ ، ١]

(٣٤) د(س) = س(س^{٢} - ١٢)   [-١ ، ٤]

(٣٥) د(س) = (س - ١) (س - ٢)^{٢} [٠ ، ٥]

(٣٦) د(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} & \text{عندما س} \leqslant ٠ \\ \text{س}^{٢} - ٢\text{س} & \text{عندما س} > ٠ \end{cases}$ [-٣، ٣]

ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة د الذى له الخواص المعطاة فى كل مما يأتى:

(٣٧) د (٤) = ٣ ، د$'$(٤) = ٠ ، د$''$(س) > ٠ لجميع قيم س.

(٣٨) د (٢) = ٥ ، د$'$(٢) = ٠ ، د$''$(س) > ٠ عندما س < ٢ ، د$''$(س) < ٠ عندما س > ٢

(٣٩) د (-٣) = ٨ ، د(٠) = ٤ ، د (٣) = ٠ ، د$'$(س) < ٠ عندما س < -٣ وعندما س > ٣،
د$''$(س) < ٠ عندما س < ٠ ، د$''$(س) > ٠ عندما س > ٠

(٤٠) د (٠) = ٣ ، د$'$(٢) = د$'$(-٢) = ٠ ، د$'$(س) < ٠ عندما -٢ < س < ٢ ، د$''$(س) < ٠ عندما س < ٠ ،
د$''$(س) > ٠ عندما س >٠

ارسم الشكل العام لكل من المنحنيات التالية مبينًا عليها القيم القصوى المحلية ونقط الانقلاب إن وجدت:

(٤١) د(س) = ٤ - س^{٢}

(٤٢) د(س) = س^{٢} - ٤س + ٣

(٤٣) د(س) = س(س + ٣)^{٢}

(٤٤) د(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - ٤س + $\frac{١}{٣}$

(٤٥) د(س) = ٢ س^{٣} - ٩س^{٢} + ١٢ س - ٢

(٤٦) د(س) = ٥ + ٣س - س^{٣}

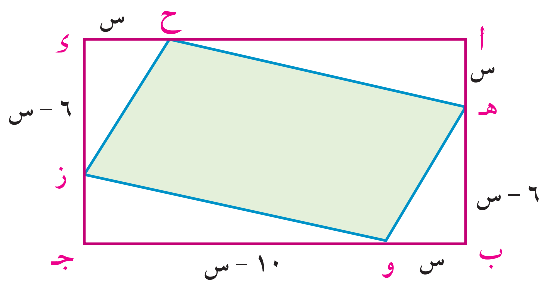
(٤٧) عين قيم أ ، ب جـ ، ء للمنحنى ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء بحيث تكون له قيمة عظمى محلية عند (٠ ، ٦) وقيمة صغرى محلية عند (١ ، ٥) ثم ارسم المنحنى.

(٤٨) سلك طوله ٢٠ مترًا يراد تشكيله على هيئة مستطيل . ما هى أبعاد المستطيل التى تجعل المساحة أكبر مايمكن.

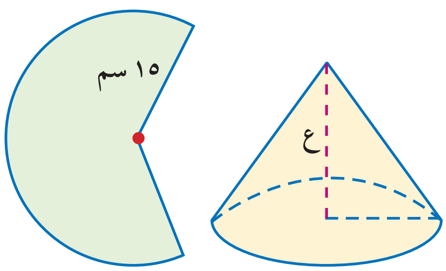
(٤٩) **فى الشكل المقابل أ ب جـ ء مستطيل :**

أ) أثبت أن الشكل هـ و ز ح متوازى أضلاع مساحته
م = ٢س^{٢} - ١٦ س + ٦٠

ب) أوجد أصغر قيمة ممكنة للمساحة م.



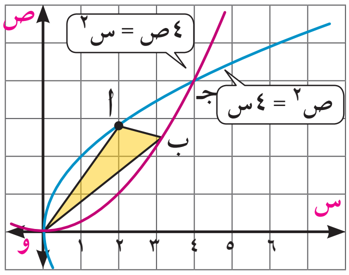
(٥٠) قطعة من الورق على شكل قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٥سم. طويت لتشكل سطح مخروط دائرى قائم ارتفاعه ع سم.
بين أن حجم المخروط ح سم^{٣} يعطى بالعلاقة
ح = $\frac{\pi}{٣}$ ع (٢٢٥ - ع^{٢})،
ثم أوجد أكبر حجم ممكن لهذا المخروط.



٥١ أوجد ارتفاع اسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل كره مفرغة طول نصف قطرها من الداخل ١٠سم، عندما تكون المساحة الجانبية للاسطوانة أكبر ما يمكن.

٥٢ أثبت أنه لجميع قيم س ∋ ح تتحقق المتباينة

$$\frac{\text{س}}{\text{ا س}^{٢} + \text{ب}} \geqslant \frac{١}{٢\sqrt{\text{ا ب}}} \qquad \text{حيث ا} > ٠\text{، ب} > ٠$$

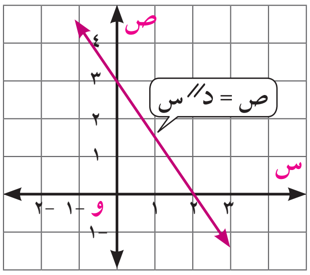


٥٣ لتكن جـ نقطة تقاطع المنحنيين ص٢ = ٤س ، ٤ص = س٢، النقطة ا تقع على المنحنى ص٢ = ٤س وإحداثيها السينى يساوى ٢ ، النقطة ب(س، ص) تقع على المنحنى ٤ص = س٢ بين النقطتين و ، جـ ، أوجد أكبر مساحة ممكنة للمثلث و ا ب

٥٤ خزان مغطى للمياه، مكون من متوازى مستطيلات، قاعدته مربعة الشكل، طول ضلعها ٢س و إرتفاعه س، يعلوه أسطوانة دائرية قائمة طول قطرها ٢س وارتفاعها ص. إذا كان حجم الخزان الكلى ٢٧ مترًا مكعبًا فاحسب قيمة س التى تجعل مساحة الخزان السطحية أقل ما يمكن.

اختبار تراكمي

١ يبين الشكل المقابل منحنى د″(س) للدالة د، أكمل:



أ) منحنى د محدب لأعلى عندما س ∋ ....

ب) منحنى د له نقطة انقلاب عند س = ...

جـ) إذا كان د′(-١) = د′(٥) = ٠ فإنه يوجد للدالة د قيمة عظمى محلية عند س = ...

د) د متناقصة لكل س ∋ ....

٢ إذا كان د′(س) = أ س + ب حيث أ > ٠

أ) ابحث وجود قيمة قصوى للداله د مبينًا نوعها إن وجدت.

ب) حدد فترات تزايد وتناقص الدالة د عندما أ = -٢، ب = ٥

٣ حدد النقط الحرجة وفترات التزايد والتناقص للدالة د حيث د(س) = $\sqrt[3]{(س^{٢} - ١)^{٢}}$

٤ إذا كان د(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ١٢س ، ابحث وجود نقط حرجة للدالة د وحدد فترات التحدب إلى أعلى وفترات التحدب إلى أسفل ونقط الانقلاب إن وجدت، ثم ارسم شكلًا عامًّا لمنحنى د

٥ ارسم شكلًا عامًّا لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) إذا كان:

د متصلة ومجالها [-١ ، ٥]، د(١) = د(٣) = ٠ ، د′(٢) غير موجودة،

د′(س) > ٠ عندما س > ٢، د′(س) < ٠ عندما س < ٢ ، د″(س) > ٠ عندما س ≠ ٢

٦ إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على ع، د(س) = $\begin{cases} ٢س^{٢} + أ س + ب & \text{عندما } س \geqslant ١ \\ ٣س - س^{٢} & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$

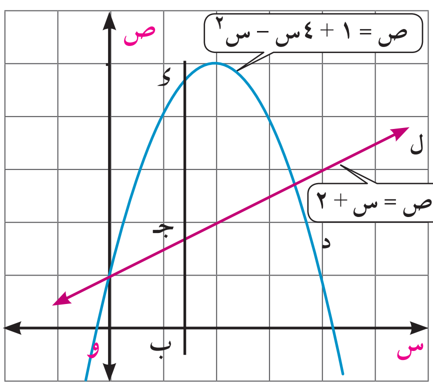
أ) أوجد قيم الثابتين أ، ب

ب) حدد فترات التحدب إلى أعلى والتحدب إلى أسفل ونقط الانقلاب إن وجدت.

٧ من مجموعة كل الأزواج المرتبة (س، ص) للأعداد الصحيحة غير السالبة والتى مجموع مسقطيها ٥ ، أوجد الزوج المرتب الذى يجعل حاصل ضرب مربع المسقط الأول ومكعب المسقط الثانى أكبر ما يمكن.

٨ يبين الشكل المقابل منحنى الدالة د، والمستقيم ل

إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{بجـ}$ يوازى محور الصادات ويقطع الجزء الموجب لمحور السينات، والمستقيم ل ومنحنى د فى النقط ب، جـ، ى على الترتيب فأوجد إحداثي النقطة ب التى تجعل جـ ى أكبر ما يمكن.



الوحدة الرابعة

التكامل المحدد وتطبيقاته

The Definite Integral and its Applications

مقدمة الوحدة

هل رأيت صانع السلال وهو يصنع إحدى سلاله؟ إن عملية تجميع الشرائح المتوازية جنبًا إلى جنب يؤدى إلى تكامل سلته. ساعد ذلك إلى محاولة العلماء اكتشاف طرق عامة لتقدير مساحة أى منطقة مستوية بتقسم أي منطقة مستوية إلى مناطق صغيرة جدًا ثم جمع مساحات هذه المناطق الصغيرة لتقدير المساحة المطلوبة مما ساهم في اكتشاف علم التكامل ورمز لعملية التكامل بالرمز $\int$ وهو الحرف الأول من كلمة Sum والتي تعني عملية التجميع، فى هذه الوحدة ستعرف طرق مختلفة لحساب التكامل غير المحدد مثل التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزئ لإيجاد مجموعة المشتقات العكسية لدالة متصلة على فترة معطاة ثم التعرف على التكامل المحدد من خلال النظرية الأساسية فى التفاضل والتكامل التى تربط بين التكامل المحدد والتكامل غير المحدد واستخدام التكامل المحدد فى إيجاد مساحة منطقة مستوية أو حجم جسم دورانى كما تتعرف على بعض التطبيقات الاقتصادية للتكامل المحدد واستخدام النمذجة الرياضية فى حل المشكلات الرياضية والحياتية .

مخرجات التعلم

بعد دراسة هذه الوحدة، وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف بعض طرق التكامل مثل: التعويض غير المثلثى، التكامل بالتجزىء $\int \text{س هـ}^{\text{س}}\ \text{ءس}$
- يتعرف تكامل الدوال المثلثية وجدول التكاملات الأساسية.
- يتعرف التكامل المحدد (النظرية الأساسية فى التفاضل) ويستنتج بعض خواصه.
  - $\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{د(س) ءس} = -\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ءس}$
  - $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س) ءس} = ٠$
  - $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ك د(س) ءس} = \text{ك} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ءس}$
  - $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د(س)} \pm \text{ر(س)}]\ \text{ءس}$ $= \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ءس} \pm \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ر(س) ءس}$
  - $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ءس} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{د(س) ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د(س) ءس}$
  - $\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س) ءس} = ٢ \int_{٠}^{\text{أ}} \text{د(س) ءس}$ حيث د دالة زوجية.
  - $\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س) ءس} = ٠$ حيث د دالة فردية.
- يستخدم التكامل المحدد فى حل مشكلات تتضمن إيجاد مساحة.
- يوجد مساحة المنطقة المستوية تحت المنحنى، فوق محور السينات حيث د (س) غير سالبة لجميع قيم س فى المجال باستخدام التكامل المحدد.
- يوجد مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين منحنيين.
- يستخدم التكامل المحدد فى حل مشكلات تتضمن إيجاد حجم سطح دورانى حول أحد محاور الإحداثيات.

المصطلحات الأساسية

- مشتقة عكسية *Antiderivative*
- تكامل غير المحدد *Indefinite Integral*
- تفاضلى *Differential*
- تكامل بالتعويض *Integration by Substitution*
- تكامل بالتجزئ *Integration by Parts*
- قاعدة *Rule*
- دالة مثلثية *Trigonometric Function*
- تكامل محدد *Definite Integral*
- النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل *Fundamental theorem of calculus*
- المساحات فى المستوى *Areas in the plane*
- حجوم الأجسام الدورانية *Volumes of Revolution solids*

دروس الوحدة

الدرس (٤ - ١): طرق التكامل.

الدرس (٤ - ٢): تكامل الدوال المثلثية.

الدرس (٤ - ٣): التكامل المحدد.

الدرس (٤ - ٤): المساحات فى المستوى.

الدرس (٤ - ٥): حجوم الأجسام الدورانية.

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية – برامج رسومية للحاسوب.
- الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

مخطط تنظيمى للوحدة

طرق التكامل

Methods of Inegration

سوف تتعلم

- إيجاد الدالة الأصلية لدالة معطاة.
- إيجاد تفاضلى دالة.
- حساب التكامل بالتعويض.
- حساب التكامل بالتجزئ.

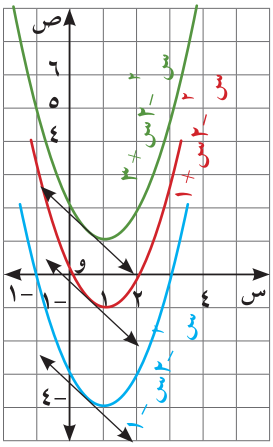
المصطلحات الأساسية

- المشتقة العكسة Antiderivative
- التكامل غير المحدد Indefinite Integral
- تفاضلى Differential

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

مقدمة



سبق وتعرفت على المشتقة العكسية أو التكامل غير المحدد، وهو عملية عكسية لعملية الاشتقاق، فيقال للدالة ت أنها مشتقة عكسية للدالة د فى فترة ف إذا كان: $\frac{ى}{ى س}$ ت (س) = د (س) لكل س ∈ ف

عند إضافة أى ثابت للمشتقة العكسية ت، (**يعرف بالثابت الاختيارى**) تُمثَل المشتقة العكسية عندئذ بمجموعة المنحنيات ص = د(س) + ث التى تختلف عن بعضها فى الثابت ث وميل المماس لأى منها متساوى لذلك فهى منحنيات متوازية كما فى الشكل المقابل، وقد اصطلح على تسمية مجموعة المشتقات العكسية هذه بالتكامل غير المحدد و يرمز به بالرمز: $\int$ د (س) ى س و يكون:

$$\boxed{\int \text{د(س) ى س} = \text{ت (س)} + \text{ث}}$$

للتكامل غير المحدد الخواص التالية:

إذا كانت د ، ر دالتين لهما مشتقتان عكسيتان فى الفترة ف فإن:

١- $\int$ [د (س) ± ر (س)] ى س = $\int$ د (س) ى س ± $\int$ ر (س) ى س

٢- $\int$ ك د (س) ى س = ك $\int$ د (س) ى س   حيث ك عدد حقيقى ثابت

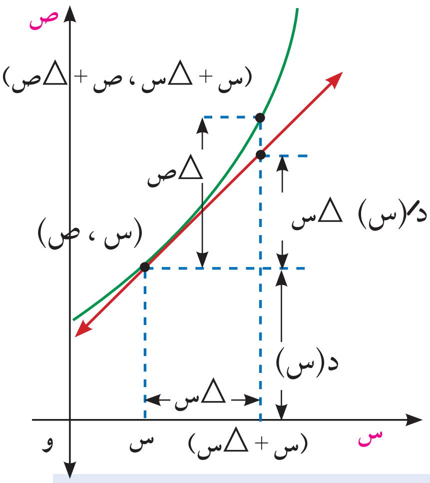
لاحظ أن:

$\int$ سⁿ ى س = $\frac{\text{س}^{ن+١}}{ن+١}$ + ث   حيث ن ≠ -١ ، ث ثابت اختيارى

وعلى ذلك

$\int$(٣س^{٢} + ٤س + ٥) ى س = س^{٣} + ٢س^{٢} + ٥س + ث

- عملية إيجاد المشتقات العكسية يتطلب معرفة صور التكاملات القياسية لبعض الدوال، إلا أن التكاملات المطلوب إيجادها قد تظهر بعيدة عن التكاملات القياسية وهو أمر يتطلب التعرف على طرق أخرى للتكامل منها التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزىء اعتمادًا على تفاضلى الدالة.



التفاضلات *Differentials*

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق ، حيث ص = د (س)

من تعريف المشتقة:

$$\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = \text{د}'(\text{س}) = \lim_{\triangle\text{س} \to 0} \frac{\triangle \text{ص}}{\triangle \text{س}} = \lim_{\triangle\text{س} \to 0} \frac{\text{د}(\text{س} + \triangle\text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\text{س}}$$

∴ عندما △ س ⟵ ٠ **فإن:** $\frac{\triangle \text{ص}}{\triangle \text{س}} \longrightarrow \text{د}'(\text{س})$

أى أن: $\frac{\triangle \text{ص}}{\triangle \text{س}} \simeq \text{د}'(\text{س})$ **عندما** △ س ≃ ٠ ، △ س ≠ ٠

∴ △ ص ≃ د/(س)△س (بالضرب × △س)

تعريف

لتكن د دالة قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة تحوى س ، △ س يرمز للتغير فى س حيث △ س ≠ ٠ فإن

١- تفاضلى ص (ويرمز له بالرمز ى ص) = د/(س) △ س

٢- تفاضلى س (ويرمز بالرمز ى س) = △ س

على ذلك فإن:

$\boxed{\text{ى ص} = \text{د}'(\text{س}) \text{ ى س}}$ وهو دالة فى متغيرين $\boxed{\text{س}}$ ، $\boxed{\text{ى س}}$

إذا كانت ص = س^٣ **فإن :** ى ص = $\boxed{\text{٣س}^{٢}}$ $\boxed{\text{ى س}}$

مثال

تفاضلى الدالة

١ أوجد تفاضلى كل مما يأتى:

أ ص = $\frac{\text{س}}{\text{س-١}}$ ب ع = $\frac{٤}{٣}\pi\text{ نو}^{٣}$

جـ ص = ع . ل حيث كل من ع ، ل دالة فى س

الحل

أ ∵ ى ص = ص/ ى س ، ص = $\frac{\text{س}}{\text{س - ١}}$ = ١ + $\frac{١}{\text{س-١}}$ = ١ + (س - ١)^-١

∴ ى ص = $\frac{-١}{(\text{س - ١})^{٢}}$ ى س

ب ∵ ى ع = ع/ى نو ∴ ى ع = $\frac{٤}{٣}\pi$ × ٣نو^٢ى نو = ٤πنو^٢ ى نو

جـ ∵ ى ص = (ع • ل)/ ى س

= (ع • ل/ + ل • ع/) ى س

= ع • ل/ ى س + ل • ع/ ى س

ى ص = ع ى ل + ل ى ع

لاحظ أن

ى ل = ل/ى س

ى ع = ع/ى س

حاول أن تحل

① أوجد تفاضلى كل من:

أ ص = $(٢س + ٥)^{٤}$ ب ص = $هـ^{٢س - ٣}$

ج ص = $\frac{ع}{ل}$ حيث ع ، ل دوال فى المتغير س

تفكير ناقد: إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ أوجد: ء ص بدلالة س ، ص، ء س

التكاملات الأساسية (القياسية)

لا توجد طريقة عامة لإيجاد تكامل الدوال المختلفة تماثل طرق إيجاد مشتقات هذه الدوال، إذ ينحصر إيجاد تكامل أى دالة د فى البحث عن دالة تكون مشتقاتها هى الدالة د وهذا يتوقف على مدى استيعابك لمشتقات الدوال الأساسية السابق دراستها، والتى نلخصها فى الجدول التالى:

جدول مشتقات الدوال الأساسية و التكاملات القياسية المناظرة	
$\frac{ء}{ءس}(س^{ن}) = ن س^{ن-١}$ ، ن ∈ ع	$\int س^{ن} ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$ ، ن ∈ ع - {١}
$\frac{ء}{ءس}$(جا س) = جتا س	$\int$ جتا س ءس = جا س + ث
$\frac{ء}{ءس}$(جتا س) = - جا س	$\int$ جا س ءس = - جتا س + ث
$\frac{ء}{ءس}$(ظا س) = $قا^{٢}$س ، س ≠ $\frac{٢ن + ١}{٢}\pi$ ، ن ∈ ص	$\int قا^{٢}$س ءس = ظا س + ث ، س ≠ $\frac{٢ن + ١}{٢}\pi$ ، ن ∈ ص
$\frac{ء}{ءس}(هـ^{س}) = هـ^{س}$	$\int هـ^{س} ءس = هـ^{س} + ث$
$\frac{ء}{ءس}(أ^{س}) = أ^{س}$ لوهـ أ ، أ > ٠ ، أ ≠ ١	$\int أ^{س} ءس = \frac{١}{لوهـ أ} أ^{س} + ث$ ، أ > ٠ ، أ ≠ ١
$\frac{ء}{ءس}$(لوهـ س) = $\frac{١}{س}$ ، س > ٠	$\int \frac{١}{س}$ ءس = لوهـ|س| + ث ، س ≠ ٠

التكامل بالتعويض *Integration by Substitntion*

من أهم طرق التكامل لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين

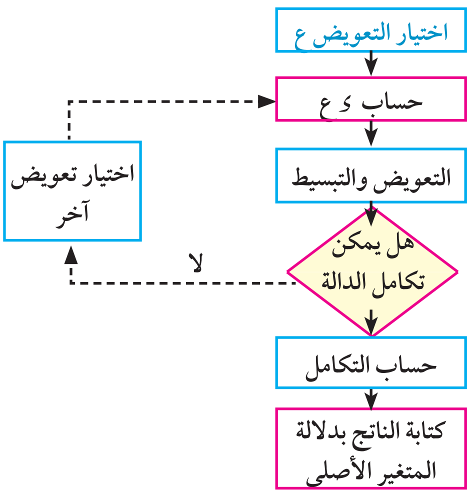
على الصورة: $\int$ د (ر (س)) ر̸(س) ء س

فإذا كانت ع = ر (س) دالة قابلة للاشتقاق

فإن ء ع = ر̸(س) ء س ويكون:

$\int$ د (ر (س)) ر̸(س) ء س = $\int$ د (ع) ء ع

لإجراء عملية التكامل بالتعويض نتبع المخطط المقابل:



مثال التكامل بالتعويض

② أوجد

أ $\int$ س^{٣} (٢ س^{٤} - ٧)^{٥} ى س

ب $\int \frac{\text{س} + ٤}{(\text{س}^{٢} + ٨\text{س})^{٣}}$ ى س

الحل

أ بوضع ع = ٢س^{٤} - ٧ $\quad \therefore$ ى ع = ٨س^{٣} ى س

$\int$ س^{٣} (٢س^{٤} - ٧)^{٥} ى س $= \frac{١}{٨} \int \underbrace{(٢\text{س}^{٤} - ٧)^{٥}}_{\text{ع}} \underbrace{(٨\text{س}^{٣} \text{ ى س})}_{\text{ى ع}}$

$= \frac{١}{٨} \int$ ع^{٥} ى ع $= \frac{١}{٨ \times ٦}$ ع^{٦} + ث

$= \frac{١}{٤٨}$ (٢ س^{٤} - ٧)^{٦} + ث

ب بوضع ع = س^{٢} + ٨س $\quad \therefore$ ى ع = (٢س + ٨) ى س = ٢ (س + ٤) ى س

$\int \frac{\text{س} + ٤}{(\text{س}^{٢} + ٨\text{س})^{٣}}$ ى س $= \frac{١}{٢} \int \frac{٢(\text{س}+٤) \text{ ى س}}{(\text{س}^{٢} + ٨\text{س})^{٣}} = \frac{١}{٢} \int \frac{١}{\text{ع}^{٣}}$ ى ع

$= \frac{١}{٢} \int$ ع$^{-٣}$ ى ع $= \frac{١}{٢ \times -٢}$ ع$^{-٢}$ + ث

$= \frac{-١}{٤(\text{س}^{٢} + ٨\text{س})^{٢}}$ + ث

حاول أن تحل

② أوجد :

أ $\int$ ٣س (س^{٢} + ٣)^{٤} ى س

ب $\int \frac{\text{س}^{٢}}{(\text{س}^{٣} - ٤)^{٥}}$ ى س

مثال التكامل بالتعويض

③ أوجد

أ $\int$ س (س + ٤)^{٧} ى س

ب $\int$ (س^{٢} + ٥) $\sqrt{\text{س} - ١}$ ى س

الحل

أ بوضع ع = س + ٤ $\quad \therefore$ س = ع - ٤ ، ى س = ى ع

$\int$ س (س + ٤)^{٧} ى س $= \int$ ع^{٧} (ع - ٤) ى ع $= \int$ (ع^{٨} - ٤ ع^{٧}) ى ع **(تعويض)**

$= \frac{١}{٩}$ ع^{٩} - $\frac{١}{٢}$ ع^{٨} + ث **(تكامل)**

$= \frac{١}{١٨}$ ع^{٨} (٢ ع - ٩) + ث **(تبسيط)**

$= \frac{١}{١٨}$ (س + ٤)^{٨} (٢س - ١) **(تعويض عن ع)**

ب بوضع $ع^{2} = س - 1$ **لتبسيط صورة التكامل** $\therefore\ س = ع^{2} + 1 \ ،\ ى س = 2ع\, ى ع$

$\int (س^{2}+5)\sqrt{س-1}\ ى س = \int [(ع^{2}+1)^{2}+5] \times ع \times 2ع\ ى ع$ **(تعويض)**

$= \int [ع^{4}+2ع^{2}+6] \times 2ع^{2}\ ى ع$

$= 2\int (ع^{6}+2ع^{4}+6ع^{2})\ ى ع$ **(تبسيط)**

$= 2\left[\frac{1}{7}ع^{7} + \frac{2}{5}ع^{5} + 2ع^{3}\right] + ث$ **(تكامل)**

$= \frac{2}{35}ع^{3}\left[5ع^{4} + 14ع^{2} + 70\right] + ث$ **(عامل مشترك)**

$= \frac{2}{35}(س-1)^{\frac{3}{2}}\left[5(س-1)^{2} + 14(س-1) + 70\right] + ث$ **(التعويض عن ع)**

$= \frac{2}{35}\sqrt{(س-1)^{3}}\ (5س^{2} + 4س + 61) + ث$

حاول أن تحل

٣ أوجد التكاملات الآتية:

أ $\int س(2س-3)^{4}\ ى س$ **ب** $\int س^{2}\sqrt[3]{3س+1}\ ى س$

مثال

التكامل بالتعويض

٤ أوجد :

أ $\int \sqrt{\frac{1+\sqrt{س}}{س}}\ ى س$ **ب** $\int 6س\, هـ^{س^{2}}\ ى س$

الحل

أ بوضع $ع = 1 + \sqrt{س}$ $\therefore\ \sqrt{س} = ع - 1 \ ،\ س = (ع-1)^{2}$

$ى س = 2(ع-1)\ ى ع$

$\int \sqrt{\frac{1+\sqrt{س}}{س}}\ ى س = \int \sqrt{\frac{ع}{(ع-1)^{2}}} \times 2(ع-1)\ ى ع$ **(بالتعويض)**

$= \int 2ع^{\frac{1}{2}}\ ى ع = 2 \times \frac{2}{3}ع^{\frac{3}{2}} + ث$ **(بالتكامل)**

$= \frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{س})^{3}} + ث$ **(بالتعويض عن ع)**

ب بوضع $ع = س^{2}$ $\therefore\ ى ع = 2س\ ى س$

$\int 6س\, هـ^{س^{2}}\ ى س = 3\int هـ^{س^{2}}\ (2س\ ى س)$

$= 3\int هـ^{ع}\ ى ع = 3\, هـ^{ع} + ث$ **(التعويض والتكامل)**

$= 3\, هـ^{س^{2}} + ث$ **(بالتعويض عن ع)**

حاول أن تحل

٤ أوجد :

أ $\int \frac{س}{\sqrt{١ - ٣س^٢}} \, ءس$

ب $\int (٣ - س) هـ^{٦س - س^٢} \, ءس$

مثال

التكامل بالتعويض

٥ أوجد

أ $\int \frac{٥ س}{٣س^٢ - ١} \, ء س$

ب $\int \frac{\sqrt{لو_{هـ} س}}{س} \, ء س$

الحل

أ بوضع ع = $٣س^٢ - ١$ ، ء ع = ٦س ء س

$\int \frac{٥ س}{٣س^٢ - ١} \, ء س = \frac{٥}{٦} \int \frac{٦ س ءس}{٣س^٢ - ١} = \frac{٥}{٦} \int \frac{١}{ع} \, ء ع$ (التعويض)

$= \frac{٥}{٦}$ لو$_{هـ}$ |ع| + ث $= \frac{٥}{٦}$ لو$_{هـ}$ |$٣س^٢ - ١$| + ث (التكامل والتعويض)

ب بوضع ع = لو$_{هـ}$ س ∴ ء ع = $\frac{١}{س}$ ء س

$\int \frac{\sqrt{لو_{هـ} س}}{س} \, ء س = \int \sqrt{لو_{هـ} س} \, (\frac{١}{س} \, ء س) = \int ع^{\frac{١}{٢}} \, ء ع$ (بالتعويض)

$= \frac{٢}{٣} ع^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{٢}{٣} [لو_{هـ} (س)]^{\frac{٣}{٢}} + ث$ (بالتكامل والتعويض)

حاول أن تحل

٥ أوجد :

أ $\int \frac{هـ^{٢س}}{هـ^{٢س} + ٣} \, ء س$

ب $\int \frac{١}{س(لو_{هـ} س)^٢} \, ء س$

تفكير ناقد: باستخدام التكامل بالتعويض أثبت صحة قواعد التكامل التالية:

١- $\int [د(س)]^ن \, د'(س) \, ء س = \frac{[د(س)]^{ن+١}}{ن + ١} + ث$ حيث ن ≠ -١

٢- $\int \frac{د'(س)}{د(س)} \, ء (س) =$ لو$_{هـ}$ |د(س)| + ث حيث د (س) ≠ ٠

التكامل بالتجزئ *Integration by Parts*

إذا كانت ص ، ع دالتين فى المتغير س وقابلتين للإشتقاق، فإن:

$$\frac{ء}{ء س} (ص ع) = ص \frac{ء ع}{ء س} + ع \frac{ء ص}{ء س}$$

بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س

$$\int \frac{ء}{ء س} (ص ع) \, ء س = \int ص \frac{ء ع}{ء س} \, ء س + \int ع \frac{ء ص}{ء س} \, ء س$$

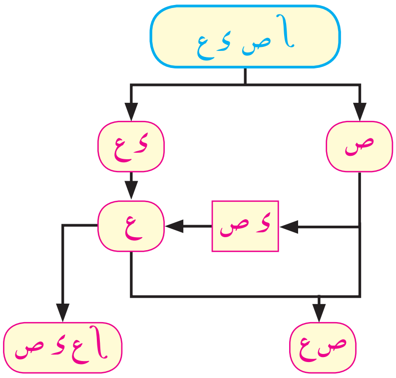
تذكر أن

$ء ع = \frac{ء ع}{ء س} \, ء س$

$ء ص = \frac{ء ص}{ء س} \, ء س$

$$ص\,ع = \int ص\,ءع + \int ع\,ءص$$

أى أن: $\int ص\,ءع = ص\,ع - \int ع\,ءص$



تسمى المعادلة السابقة بقاعدة التكامل بالتجزىء ، وتستخدم لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين ليست أحدهما مشتقة للأخرى، ذلك باختيار مناسب لكل من ص ، ع بحيث يمكن حساب التكامل بالطرف الأيسر بطريقة أسهل من حساب التكامل بالطرف الأيمن، وتتبع المخطط المقابل كما يتضح من الأمثلة التالية:

مثال

التكامل بالتجزىء

٦ أوجد:

أ $\int س\,هـ^{س}\,ءس$ ب $\int س^{٢}\,هـ^{س}\,ءس$

الحل

أ لإيجاد $\int س\,هـ^{س}\,ءس$:

نفرض أن: $ص = س$ ، $ءع = هـ^{س}\,ءس$

$\therefore ءص = ءس$ ، $ع = \int هـ^{س}\,ءس = هـ^{س}$

$\because \int ص\,ءع = ص\,ع - \int ع\,ءص$

$\therefore \int س\,هـ^{س}\,ءس = س\,هـ^{س} - \int هـ^{س}\,ءس = س\,هـ^{س} - هـ^{س} + ث = هـ^{س}(س-١) + ث$

ملاحظة هامة: إضافة ثابت إلى الدالة ع لا يغير من النتيجة (أثبت ذلك)

ب لإيجاد $\int س^{٢}\,هـ^{س}\,ءس$:

نفرض أن: $ص = س^{٢}$ ، $ءع = هـ^{س}\,ءس$

$ءص = ٢س\,ءس$ ، $ع = \int هـ^{س}\,ءس = هـ^{س}$

$\int س^{٢}\,هـ^{س}\,ءس = س^{٢}\,هـ^{س} - \int ٢س\,هـ^{س}\,ءس$

$= س^{٢}\,هـ^{س} - ٢\int س\,هـ^{س}\,ءس$

$\boxed{\int س\,هـ^{س}\,ءس = هـ^{س}(س-١) + ث \text{ من أ}}$

$= س^{٢}\,هـ^{س} - ٢\,\boxed{هـ^{س}(س-١)} + ث$

$= هـ^{س}\,[س^{٢} - ٢س + ٢] + ث$

حاول أن تحل

٦ أوجد :

أ $\int س\,هـ^{-٢س}\,ءس$ ب $\int س^{٢}\,هـ^{س+٣}\,ءس$

لاحظ أن:

إختيار ص ، ءع يتوقف على:

١- ء ص أبسط من ص

٢- ء ع اسهل من التكامل

مثال — تكامل بالتجزيء

٧ أوجد

أ $\int \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\ \text{ء س}$

ب $\int \text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\ \text{ء س}$

الحل

أ بفرض أن :

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \qquad \text{ء ع} = \text{ء س}$$

$$\text{ء ص} = \frac{١}{\text{س}}\ \text{ء س} \longrightarrow \text{ع} = \int \text{ء س} = \text{س}$$

$$\int \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س ء س} = \text{س لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \int \text{س} \times \frac{١}{\text{س}}\ \text{ء س}$$

$$= \text{س لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \text{س} + \text{ث} = \text{س}\ (\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - ١) + \text{ث}$$

ب نفرض أن:

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \qquad \text{ء ع} = \text{س ء س}$$

$$\text{ء ص} = \frac{١}{\text{س}}\ \text{ء س} \longrightarrow \text{ع} = \int \text{س ء س} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}$$

$$\int \text{س لو}_{\text{هـ}}\,\text{س ء س} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \int \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} \times \frac{١}{\text{س}}\ \text{ء س}$$

$$= \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \frac{١}{٤}\text{س}^{٢} + \text{ث} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\ (\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - ١) + \text{ث}$$

حاول أن تحل

٧ أوجد :

أ $\int \text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{س} + ١)\ \text{ء س}$

ب $\int (\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \div \sqrt{\text{س}})\ \text{ء س}$

مثال — تكامل بالتجزئ

٨ أوجد:

أ $\int \frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س} + ١)^{٢}}\ \text{ء س}$

ب $\int \frac{٤\text{س}}{\sqrt[٣]{٢\text{س}+١}}\ \text{ء س}$

الحل

أ لاحظ أن $(\text{س} + ١)^{-٢}$ أسهل فى التكامل

بوضع $\text{ص} = \text{س هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{ء ع} = (\text{س} + ١)^{-٢}\ \text{ء س}$

$$\text{ء ص} = (\text{س هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}})\ \text{ء س} \longrightarrow \text{ع} = \frac{-١}{\text{س}+١}$$

$$\int \frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+١)^{٢}}\ \text{ء س} = -\frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١} - \int \frac{-١}{\text{س}+١} \times \text{هـ}^{\text{س}}\ (\text{س} + ١)\ \text{ء س}$$

$$= -\frac{س\,هـ^{س}}{س+١} + \int هـ^{س}\,ى\,س$$

$$= \frac{-س\,هـ^{س} + هـ^{س}(س+١)}{س+١} + ث = \frac{هـ^{س}}{س+١} + ث$$

ب بوضع $ص = ٤س$ $\qquad$ $ى\,ع = (٢س+١)^{-\frac{١}{٣}}\,ى\,س$

$ى\,ص = ٤\,ى\,س$ $\qquad$ $ع = \frac{٣}{٢\times٢}\,(٢س+١)^{\frac{٢}{٣}}$

$$\int \frac{٤س}{\sqrt[٣]{٢س+١}}\,ى\,س = ٣س\,(٢س+١)^{\frac{٢}{٣}} - \int \frac{٣}{٤}\,(٢س+١)^{\frac{٢}{٣}} \times ٤\,ى\,س$$

$$= ٣س\,(٢س+١)^{\frac{٢}{٣}} - \frac{٣\times٣}{٥\times٢}\,(٢س+١)^{\frac{٥}{٣}} + ث$$

$$= \frac{٣}{١٠}\,(٢س+١)^{\frac{٢}{٣}}\,[١٠س - ٣(٢س+١)] + ث$$

$$= \frac{٣}{١٠}(٢س+١)^{\frac{٢}{٣}}\,(٤س - ٧) + ث$$

حاول أن تحل

٨ أوجد :

أ $\int \frac{س^{٣}+٥}{هـ^{س^{٢}}}\,ى\,س$ $\qquad$ ب $\int \frac{س}{\sqrt{٢س+٣}}\,ى\,س$

تفكير ناقد: هل يمكنك إيجاد $\int \frac{٤\,س}{\sqrt[٣]{٢س+١}}$ ى س بطريقة التكامل بالتعويض؟ فسر إجابتك.

بعض تطبيقات التكامل غير المحدد

إذا علمنا أن الدالة $ر$ تعطى ميل المماس **(أو دالة هامش الربح أو معدل تغير دالة)** عند أى نقطة على منحنى الدالة د فإنه يمكن أن نعرف الدالة ت من عملية التكامل غير المحدد للدالة $ر$ حيث: $\boxed{د(س) = \int ر(س)\,ى\,س}$

يلاحظ أن هذا التكامل لا يعطى دالة وحيدة إذ يحتوى على ثابت اختيارى يمكن تحديده من البيانات المعطاة.

مثال

معادلة منحنى دالة

٩ إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه يعطى بالعلاقة $ر(س) = \frac{س\,هـ^{س}}{(س+١)^{٢}}$ فأوجد معادلة المنحنى إذا كان يمر بالنقطة (١ ، ٢ هـ) .

الحل

بفرض أن معادلة منحنى الدالة هى $ص = د(س)$ $\qquad$ $\therefore د(س) = \int ر(س)\,ى\,س$

$\therefore د(س) = \int \frac{س\,هـ^{س}}{(س+١)^{٢}}\,ى\,س = \frac{هـ^{س}}{س+١} + ث$ $\qquad$ [من حل مثال ٩ (أ)]

$\because$ منحنى د يمر بالنقطة (١ ، ٢ هـ) فهى تحقق معادلة $\qquad$ $\therefore ٢\,هـ = \frac{هـ}{(١+١)^{٢}} + ث$

$\therefore ث = \frac{٧\,هـ}{٤}$ وتكون $د(س) = \frac{هـ^{س}}{س+١} + \frac{٧}{٤}\,هـ$

حاول أن تحل

٩ أوجد معادلة المنحنى المار بالنقطة (٠ ، ١) والذى ميل المماس له عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه يساوى $س\sqrt{س^{٢}+١}$

تمـاريـن ٤ – ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١ $\int س\,(س^{٢}+٣)^{٥}\,ء\,س$ يساوى

أ $\frac{١}{٦}(س^{٢}+٣)^{٦}+ث$ ب $\frac{١}{١٢}(س^{٢}+٣)^{٦}+ث$ ج $\frac{١}{٤}(س^{٢}+٣)^{٤}+ث$ د $\frac{١}{٨}(س^{٢}+٣)^{٤}+ث$

٢ إذا كان $\int(٢س+٣)\,لو_{هـ}\,س\,ء\,س = ص\,ع - \int ع\,ء\,ص$ فإن ص ع يساوى

أ $٢س\,لو_{هـ}\,س$ ب $(٢س+٣)\,لو_{هـ}\,س$ ج $\frac{١}{٢}(٢س+٣)\,لو_{هـ}\,س$ د $س(س+٣)\,لو_{هـ}\,س$

٣ إذا كان $\int(٢س-١)\,هـ^{٢س+٣}\,ء\,س = ص\,ع - \int ع\,ء\,ص$ فإن $\int ع\,ء\,ص$

أ $هـ^{٢س+٣}+ث$ ب $\frac{١}{٢}هـ^{٢س+٣}+ث$ ج $-هـ^{٢س+٣}+ث$ د $-\frac{١}{٢}هـ^{٢س+٣}+ث$

باستخدام التعويض المناسب أوجد التكاملات الآتية:

٤ $\int س\,(س-٢)^{٤}\,ء\,س$ ٥ $\int س^{٢}\,(س-٢)^{٣}\,ء\,س$ ٦ $\int س^{٣}\,(س^{٢}-١)^{٥}\,ء\,س$

٧ $\int س\,\sqrt{س+٤}\,ء\,س$ ٨ $\int(س^{٢}-١)\sqrt{س+١}\,ء\,س$ ٩ $\int س^{٥}\,(س^{٢}+٣)^{٤}\,ء\,س$

١٠ $\int \frac{س}{٣س^{٢}+٢}\,ء\,س$ ١١ $\int \frac{س}{س+١}\,ء\,س$ ١٢ $\int \frac{س+١}{\sqrt{س-١}}\,ء\,س$

١٣ $\int \frac{س^{٢}}{\sqrt{٢س-١}}\,ء\,س$ ١٤ $\int س\,هـ^{-س^{٢}}\,ء\,س$ ١٥ $\int \frac{هـ^{-س}-١}{هـ^{-س}+س}\,ء\,س$

١٦ $\int لو_{هـ}\,٥س\,\frac{ء\,س}{س}$ ١٧ $\int (لو_{هـ}\,س)^{٣}\,\frac{ء\,س}{س}$ ١٨ $\int \frac{١}{س\,لو_{هـ}\,س}\,ء\,س$

باستخدام التجزىء المناسب أوجد التكاملات الآتية:

١٩ $\int ٤س\,هـ^{٢س}\,ء\,س$ ٢٠ $\int س^{٣}\,هـ^{س^{٢}}\,ء\,س$ ٢١ $\int \frac{س}{هـ^{٢س}}\,ء\,س$

٢٢ $\int س^{٣}\,لو_{هـ}\,س\,ء\,س$ ٢٣ $\int لو_{هـ}\,س^{٢}\,ء\,س$ ٢٤ $\int (لو_{هـ}\,س)^{٢}\,ء\,س$

٢٥ $\int لو_{هـ}\,س\,\frac{ء\,س}{س^{٣}}$ ٢٦ $\int (س+١)^{٢}\,هـ^{٢س}\,ء\,س$ ٢٧ $\int س\,(لو_{هـ}\,س)^{٢}\,ء\,س$

أجب عن ما يأتى:

٢٨ أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة أ (٢ ، ٣)، وميل العمودى عليه عند أى نقطة (س ، ص) هو ٣- س.

٢٩ اذا كان ميل المماس لمنحنى عند نقطة (س ، ص) واقعة عليه هو $س\sqrt{س+١}$ أوجد معادلة المنحنى علمًا بأن المنحنى يمر بالنقطة $(٠ ، \frac{١١}{١٥})$

٣٠ أوجد معادلة المنحنى ص = د (س) إذا كان $\frac{ء^{٢}ص}{ء\,س^{٢}} = أ\,س + ب$ حيث أ ، ب ثابتان وللمنحنى نقطة انقلاب عند النقطة (٠ ، ٢) وقيمة صغرى محلية عند النقطة (١ ، ٠) ثم أوجد القيمة العظمى المحلية لهذا المنحنى.

تكامل الدوال المثلثية

Integral of Trigonometric Functions

سوف تتعلم

- قواعد تكامل الدوال المثلثية

المصطلحات الأساسية

- قاعدة Rule
- دوال مثلثية Trigonometric Function
- جدول التكاملات Table of Integrals

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

ينحصر إيجاد تكامل أى دالة فى البحث عن دالة آخرى ت إذا استخرجت مشتقتها الأولى لنتجت الدالة د ، أى : د (س) = $\frac{ء}{ء س}$ ت (س) وعلى ذلك فإن:

∫ د (س) ء س = ت (س) + ث   حيث ث ثابت اختيارى.

بين أى العلاقات التالية صحيحة:

أ ∫ جتا س ء س = جا س + ث

ب ∫ جا س ء س = جتا س + ث

جـ ∫ قا^٢^س ء س = ظا س + ث

د ∫ قتا^٢^ س ء س = ظتا س + ث

لاحظ أن: مقدار استيعابك للمشتقات الأولى للدوال المثلثية يساعدك فى إيجاد تكاملات هذه الدول

من دراستك السابقة لمشتقات الدوال المثلثية (كما فى تذكر) ، والجدول التالى لقواعد التكامل غير المحدد لبعض الدوال المثلثية ، قارن بين مشتقات الدوال المثلثية واستنتج تكاملاتها ثم أكمل الجدول.

التكامل غير المحدد
∫ جا س ء س = - جتا س + ث
∫ جتا س ء س = جا س + ث
∫ قا^٢^ س ء س = ظا س + ث
∫ قتا^٢^ س ء س =
∫ قا س ظا س ء س =
∫ قتا س ظتا س ء س =

تذكر أن

$\frac{ء}{ء س}$ (جا س) = جتا س

$\frac{ء}{ء س}$ (جتا س) = - جا س

$\frac{ء}{ء س}$ (ظا س) = قا^٢^ س

$\frac{ء}{ء س}$ (ظتا س) = - قتا^٢^ س

$\frac{ء}{ء س}$ (قا س) = قا س ظا س

$\frac{ء}{ء س}$ (قتا س) = - قتا س ظتا س

تحقق من صحة استنتاجك باستخدام تعريف المشتقة العكسية.

مثال

جدول التكامل

١ أوجد التكاملات التالية:

أ $\int (\text{جا س} + \text{جتا س})\ \text{ى س}$

ب $\int \text{قا س}\ (\text{قا س} - \text{ظا س})\ \text{ى س}$

جـ $\int \frac{١}{١ - \text{جتا}^٢\text{س}}\ \text{ى س}$

د $\int \frac{\text{جتا س}}{١ - \text{جتا}^٢\text{س}}\ \text{ى س}$

الحل

أ $\int (\text{جا س} + \text{جتا س})\ \text{ى س} = \int \text{جا س ى س} + \int \text{جتا س ى س}$

$= - \text{جتا س} + \text{جا س} + \text{ث}$

ب $\int (\text{قا س} - \text{ظا س})\ \text{قا س ى س} = \int \text{قا}^٢\text{س ى س} - \int \text{قا س ظا س ى س}$

$= \text{ظا س} - \text{قا س} + \text{ث}$

جـ $\int \frac{١}{١ - \text{جتا}^٢\text{س}}\ \text{ى س} = \int \frac{١}{\text{جا}^٢\text{س}}\ \text{ى س} = \int \text{قتا}^٢\text{س ى س} = - \text{ظتا س} + \text{ث}$

د $\int \frac{\text{جتا س}}{١ - \text{جتا}^٢\text{س}}\ \text{ى س} = \int \frac{\text{جتا س}}{\text{جا}^٢\text{س}}\ \text{ى س} = \int \frac{١}{\text{جا س}} \times \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}\ \text{ى س}$

$= \int \text{قتا س ظتا س ى س} = - \text{قتا س} + \text{ث}$

تذكر أن

$\text{جتا}^٢\text{س} + \text{جا}^٢\text{س} = ١$

$١ + \text{ظا}^٢\text{س} = \text{قا}^٢\text{س}$

$\text{ظتا}^٢\text{س} + ١ = \text{قتا}^٢\text{س}$

حاول أن تحل

١ أوجد:

أ $\int (\text{جا س} + \text{قا}^٢\text{س})\ \text{ى س}$

ب $\int \text{قا س}\ (\text{جتا}^٢\text{س} + \text{ظا س})\ \text{ى س}$

جـ $\int \text{قتا س}\ (\text{ظتا س} - \text{قتا س})\ \text{ى س}$

د $\int \frac{\text{جتا}^٢\text{س}}{١ - \text{جا س}}\ \text{ى س}$

ملاحظة هامة:

نعلم أن : $\int \text{س}^{\text{ن}}\ \text{ى س} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن} + ١} + \text{ث}$ (١) ، $\int \text{جا س ى س} = - \text{جتا س} + \text{ث}$ (٢)

ولتعميم النتائج السابقة أو جميع الصور القياسية للتكامل نلاحظ أنه بإضافة ثابت إلى المتغير المستقل س لا يؤثر على صيغة التكامل ، كماأن ضرب س فى المعامل أ فإن التكامل يحتفظ بصيغته السابقة إلا أنه يقسم على هذا المعامل.

لذلك نجد أن الصورة السابقة لكل من ١ ، ٢ هى:

$\int (\text{أ س} + \text{ب})^{\text{ن}}\ \text{ى س} = \frac{(\text{أ س} + \text{ب})^{\text{ن}+١}}{\text{أ}(\text{ن} + ١)} + \text{ث}$

، $\int \text{جا}(\text{أ س} + \text{ب})\ \text{ى س} = - \frac{١}{\text{أ}}\ \text{جتا}(\text{أ س} + \text{ب}) + \text{ث}$

مثال — الصور القياسية للتكامل

٢ أوجد :

أ $\int$ جا (٢س -٥) ء س

ب $\int$ قا^٢ (٥ - ٣س) ء س

جـ $\int$ قتا^٢ ($\frac{س + ٣}{٢}$) ء س

د $\int$ قا ٢س طا ٢س ء س

الحل

أ $\int$ جا (٢س -٥) ء س = - $\frac{١}{٢}$ جتا (٢س - ٥) + ث

ب $\int$ قا^٢ (٥ - ٣س) ء س= - $\frac{١}{٣}$ ظا (٥ - ٣س) + ث

جـ $\int$ قتا^٢ ($\frac{١}{٢}$ س + $\frac{٣}{٢}$) ء س = -٢ ظتا ($\frac{س + ٣}{٢}$) + ث

د $\int$ قا ٢ س ظا ٢س ء س = $\frac{١}{٢}$ قا ٢ س + ث

حاول أن تحل

٢ أوجد :

أ $\int$ (جا ٣س - قا^٢ ٢س) ء س

ب $\int$ ٦ قا٢ س (ظا٢س + جتا^٢ ٢س) ء س

جـ $\int$ [١ + ظتا^٢ (٣س -١)] ء س

د $\int$ $\frac{\text{جا}^٢ (٢ س -٣)}{١ - \text{جتا} (٢ س -٣)}$ ء س

مثال — تطبيقات

٣ اذا كان ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه (س ، ص) معطى بالعلاقة:

$\frac{ء ص}{ء س}$ = جا س جتا س ، أوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة ($\frac{\pi}{٦}$ ، ١)

الحل

$\because$ ميل مماس المنحنى عند أى نقطة: $\frac{ء ص}{ء س}$ = جا س جتا س

$\therefore$ معادلة المنحنى : ص = $\int$ $\frac{ء ص}{ء س}$. ء س= $\int$ جا س جتا س ء س

= $\frac{١}{٢}$ $\int$ ٢ جا س جتا س ء س = $\frac{١}{٢}$ $\int$ جا٢ س ء س

= $\frac{١}{٢}$ × - $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س + ث = - $\frac{١}{٤}$ جتا ٢س +ث

$\because$ المنحنى يمر بالنقطة ($\frac{\pi}{٦}$ ، ١)

$\therefore$ فهى تحقق معادلة

١= - $\frac{١}{٤}$ جتا (٢ × $\frac{\pi}{٦}$) + ث $\therefore$ ث = ١ + $\frac{١}{٨}$ = $\frac{٩}{٨}$

$\therefore$ معادلة المنحنى هى : ص = - $\frac{١}{٤}$ جتا ٢س + $\frac{٩}{٨}$

تذكر أن

جا ٢س = ٢ جا س جتا س

جتا ٢ س = جتا^٢ س – جا^٢ س

= ١ – ٢ جا^{٢}س

= ٢جتا^٢ س –١

حاول أن تحل

(٣) أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة (١ ، -٢) وميله المماس له عند أى نقطة عليه (س ، ص) هو:

$\frac{ءص}{ءس} = ٣\pi$ جتا π س - ٢ π جا π س

تمارين ٤ - ٢

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) اذا كانت $\frac{ءص}{ءس}$ = قتا^٢ س ، ص = ٢ عند س = $\frac{\pi}{٤}$ فإن ص تساوى

أ - ٢ - ظتا س ب ٢ - ظتا س ج -٣ - ظتا س د ٣ - ظتا س

(٢) $\int$ ٢ جتا^{٢}س ء س يساوى

أ س + $\frac{١}{٢}$ جا٢س + ث ب س + ٢ جا ٢ س + ث

ج س - $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س + ث د س - جا ٢س + ث

(٣) $\int$ قا^٤ س ظا س ء س تساوى

أ $\frac{١}{٥}$ قا^{٥}س + ث ب $\frac{١}{٤}$ قا^٤ س + ث

ج $\frac{١}{٣}$ ظا^٣ س + ث د - $\frac{١}{٣}$ ظا^٣ س + ث

(٤) $\int$(٣س + ٢) جا س ء س تساوى

أ (٣ س + ٢) جتا س + ٣ جا س + ث ب -(٣س + ٢) جتا س + ٣ جا س + ث

ج (٣س + ١) جتا س + ٢ جا س + ث د -(س+١) جتا س - ٢ جا س + ث

أوجد التكاملات الآتية:

(٥) $\int \sqrt{٣}$ جتا س ء س (٦) $\int$ قتا^٢ (٢س + ٣) ء س (٧) $\int$ ظا س جتا س ء س

(٨) $\int$ جا س جتا س ء س (٩) $\int$(١ + ظا^{٢}س) جتا^٢ س ء س (١٠) $\int$(جا س - جتا س)^٢ ء س

(١١) $\int$ جتا^٣ س جا س ء س (١٢) $\int$ جا^٥ س جتا س ء س (١٣) $\int$ س^٢ جتا (س^٣ + ٥) ء س

(١٤) $\int$ (٣ + جاس)^٥ جتا س ء س (١٥) $\int$ قا^٥ س ظا س ء س (١٦) $\int \frac{\text{جتا}^٣\text{س - ٤}}{\text{جتا}^٢\text{س}}$ ء س

(١٧) $\int$(جتا^{٢}س + جتا س) ء س (١٨) $\int$(جتا س + قا س)^{٢}ء س (١٩) $\int$(ظا^٢ س + ٢ جا^٢ س) ء س

أجب عن ما يأتى

(٢٠) إذا كان $\frac{ءص}{ءس}$ = ٧ - جا٢ س اوجد ص بدلالة س إذا كان ص = ٥ عند س= ٠

(٢١) أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة ($\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi^٢}{٤}$ + ٩) إذا كان ميل المماس له عند أى نقطة (س ، ص) عليه يعطى بالعلاقة التالية: م = ٢س + $\frac{١}{٢}$ قا^٢ $\frac{س}{٢}$

(٢٢) منحنى ميل المماس عند أى نقطة يساوى - أ قتا^٢ س حيث أ ثابت فإذا كان المنحنى يمر بالنقطتين ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٥) ، ($\frac{٣\pi}{٤}$ ، ١) أوجد معادلة المنحنى.

التكامل المحدد

The Definite Integral

سوف تتعلم

- مفهوم التكامل المحدد.
- استخدام النظرية الأساسية فى التفاضل والتكامل لإيجاد التكامل المحدد.
- بعض خواص التكامل المحدد.

المصطلحات الأساسية

- تكامل محدد Definite Integral

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

فكر و ناقش

إذا كانت ص = د(س) ، وميل المماس عند أى نقطة (س، ص) على منحنى الدالة د هو:

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{د}'(\text{س}) = ٢\,\text{س} + ٣$$

هل يمكنك تعيين قيمة محددة لكل من د(٣)، د(٥) ، د(٥) - د(٣) ؟ فسر إجابتك.

لاحظ أن

١ من تعريف التكامل غير المحدد:

$$\text{ص} = \int \text{د}'(\text{س})\ \text{ء س} = \text{د}(\text{س}) + \text{ث}$$

حيث ث مقدار ثابت إختيارى لا يتوقف على س ومن الضرورى الاحتفاظ به فى التكامل حتى يكون شاملاً لجميع الدوال التى معدل تغيرها هو د(س) وعلى ذلك فإن التكامل غير المحدد لاينتج قيمة محددة تناظر قيمة معينة للمتغير س .

٢ إذا كانت قيمة التكامل عند س = أ هى د(أ) + ث
وقيمته عند س = ب هى د(ب) + ث
∴ الفرق بين قيمتى التكامل عند س = أ ، س = ب
يساوى د(ب) - د(أ) وهو قيمة معينة (مهما كانت قيمة المقدار الثابت ث)
ويرمز له بالرمز $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}'(\text{س})\ \text{ء س}$ حيث :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}'(\text{س})\ \text{ء س} = \text{د}(\text{ب}) - \text{د}(\text{أ})$$

وتعرف هذه الصورة بالتكامل المحدد.

تعلم

النظرية الأساسية فى التفاضل Foundamental Theorem of Calculus

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] ، وكانت ت أى مشتقة عكسية للدالة د على نفس الفترة، فإن:

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\, ء س = ت(ب) - ت(أ)$$

ملاحظات:

١ يسمى $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ء س$ بالتكامل المحدد، ويقرأ تكامل د(س) بالنسبة إلى س من أ إلى ب، وهو عدد حقيقى تتوقف قيمته على:

أ الحدان السفلى والعلوى للتكامل المحدد أى على العددين أ، ب على الترتيب.

ب قاعدة الدالة د

أما رمز المتغير س فيمكن استبداله بأى رمز آخر دون أن يؤثر ذلك على مقدار التكامل، أى أن:

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\, ء س = \int_{أ}^{ب} د(ص)\, ء ص = \int_{أ}^{ب} د(ع)\, ء ع ......$$

ولذلك نكتب أحيانًا

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\, ء س = \int_{أ}^{ب} د$$

٢ يعبر عن ت(ب) - ت(أ) بالصورة $[ت(س)]_{أ}^{ب}$ أو $ت(س)\Big|_{أ}^{ب}$

٣ يمكن الحصول على التكامل المحدد بإيجاد التكامل غير المحدد مع إهمال ثابت التكامل (لماذا)؟ ثم التعويض عن المتغير بحدى التكامل.

٤ تطبق جميع قواعد التكامل غير المحدد وجدول التكاملات القياسية عند إيجاد قيمة التكامل المحدد لدالة متصلة، فإذا كانت د، ر دالتين متصلتين على الفترة [أ، ب]

فإن:

$$\int_{أ}^{ب} [د(س) \pm ر(س)]\, ء س = \int_{أ}^{ب} د(س)\, ء س \pm \int_{أ}^{ب} ر(س)\, ء س$$

$$\int_{أ}^{ب} ك\, د(س)\, ء س = ك \int_{أ}^{ب} د(س)\, ء س \qquad \text{حيث } ك \in ع$$

مثال حساب قيمة تكامل محدد

١ أوجد التكامل المحدد للدالة د من س = -٢ إلى س = ٤ حيث د(س) = ٣س^{٢} - ٢

الحل

الدالة د كثيرة الحدود متصلة على ع

$\therefore \int_{-٢}^{٤} (٣\text{س}^٢ - ٢)\,\text{ى س} = [\text{س}^٣ - ٢\text{س}]_{-٢}^{٤}$

$= [(٤)^٣ - ٢(٤)] - [(-٢)^٣ - (-٤)]$

$= ٦٤ - ٨ + ٨ - ٤ = ٦٠ \in \text{ع}$

حاول أن تحل

(١) أوجد قيمة كل مما يأتي:

أ $\int_{-١}^{٢} (٢\text{س} + ٣)\,\text{ى س}$ ب $\int_{٠}^{٥} \frac{٣}{\sqrt{\text{ن} + ٤}}\,\text{ى ن}$ ج $\int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جتا}\,\theta\,\text{ى}\,\theta$

نظرية إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ، ب] فإنها تكون قابلة للتكامل على هذه الفترة.

تفكير ناقد

ما الفرق بين التكامل المحدد والمتكامل غير المحدد؟ فسر إجابتك.

خواص التكامل المحدد *Properties of Definite Integral*

إذا كانت د دالة متصلة على [أ، ب]، جـ ∈] أ، ب [، فإن:

١- $\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\,\text{ى س} = -\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\,\text{ى س}$

٢- $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\,\text{ى س} = ٠$

٣- $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\,\text{ى س} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د(س)}\,\text{ى س} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\,\text{ى س}$

مثال **حساب قيمة تكامل محدد**

(٢) إذا كانت د دالة متصلة على ع، $\int_{١}^{٣} \text{د(س)}\,\text{ى س} = ٦$ ، $\int_{٥}^{٣} \text{د(س)} = -١٤$ أوجد $\int_{١}^{٥} \text{د(س)}\,\text{ى س}$

الحل

∵ د متصلة على ع ، س = ٣ تجزيء الفترة [١، ٥]

$\therefore \int_{١}^{٥} \text{د(س)}\,\text{ى س} = \int_{١}^{٣} \text{د(س)}\,\text{ى س} + \int_{٣}^{٥} \text{د(س)}\,\text{ى س}$ **خاصية (٣)**

$= \int_{١}^{٣} \text{د(س)}\,\text{ى س} - \int_{٥}^{٣} \text{د(س)}\,\text{ى س}$ **خاصية (١)**

$= ٦ - (-١٤) = ٢٠$

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت د دالة متصلة على ع، $\int_{-١}^{٤} \text{د(س)}\,\text{ى س} = ٢٥٥$، $\int_{٢}^{-١} \text{د(س)}\,\text{ى س} = -١٥$ فأوجد: $\int_{٢}^{٤} \text{د(س)}\,\text{ى س}$

مثال حساب قيمة تكامل محدد

③ أوجد $\int_{٠}^{٥} |س - ٣| \, ء س$

الحل

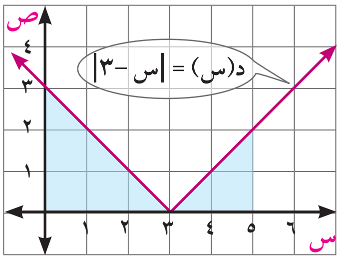
من تعريف دالة المقياس نجد أن $|س - ٣| = \begin{cases} -(س - ٣) & \text{عندما } س < ٣ \\ س - ٣ & \text{عندما } س \geqslant ٣ \end{cases}$ ، د متصلة عند س = ٣

$$\int_{٠}^{٥} |س - ٣| \, ء س = \int_{٠}^{٣} |س - ٣| \, ء س + \int_{٣}^{٥} |س - ٣| \, ء س$$

$$= \int_{٠}^{٣} (٣ - س) \, ء س + \int_{٣}^{٥} (س - ٣) \, ء س$$

$$= \left[٣س - \frac{س^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{٣} + \left[\frac{س^{٢}}{٢} - ٣س\right]_{٣}^{٥}$$

$$= \left(٩ - \frac{٩}{٢}\right) + \left(\frac{٢٥}{٢} - ١٥ - \frac{٩}{٢} + ٩\right) = \frac{١٣}{٢}$$



لاحظ أن المساحة الملونة تساوى $\frac{١٣}{٢}$ وحدة مربعة

حاول أن تحل

③ أوجد:

أ) $\int_{-٤}^{٢} |س + ١| \, ء س$ ب) $\int_{-٣}^{٣} |س^{٢} - ٤| \, ء س$

مثال حساب قيمة تكامل محدد بالتعويض

④ أوجد قيمة $\int_{٠}^{٣} س \sqrt{س^{٢} + ٣} \, ء س$

الحل

يمكن الحصول على التكامل المحدد بإيجاد المتكامل غير المحدد أولًا، ثم التعويض عن المتغير س بحدى التكامل:

أولًا:

لإيجاد $س \sqrt{س^{٢} + ٣} \, ء س$ نضع $ع = س^{٢} + ٣$ $\therefore ء ع = ٢س \, ء س$

$\therefore \int س \sqrt{س^{٢} + ٣} \, ء س = \frac{١}{٢} \int \sqrt{س^{٢} + ٣} \, (٢س \, ء س) = \frac{١}{٢} \int \sqrt{ع} \, ء ع$ **(تعويض)**

$= \frac{١}{٢} \int ع^{\frac{١}{٢}} \, ء ع = \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣} ع^{\frac{٣}{٢}} + ث$ **(تكامل)**

$= \frac{١}{٣} \sqrt{(س^{٢} + ٣)^{٣}} + ث$ **(تعويض عن ع)**

ثانيًا:

$$\int_{٠}^{٣} س \sqrt{س^{٢} + ٣} \, ء س = \left[\frac{١}{٣} \sqrt{(س^{٢} + ٣)^{٣}}\right]_{٠}^{٣}$$

$$\frac{١}{٣}\left[\sqrt{(١٢)^{٣}} - \sqrt{(٣)^{٣}}\right] = ٧\sqrt{٣}$$

٩ حاول أن تحل

٤ أوجد:

أ $\int_{٠}^{٥} س \sqrt{٢٥ - س^{٢}}\; ء س$ ب $\int_{-٢}^{٢} س^{٣} \sqrt{س^{٢} + ٣}\; ء س$

لاحظ أن

١- يمكن حل مثال ٤ مباشرة بإيجاد قيم ع المناظرة لقيم حدى المتكامل (س = ٠ ، س = ٣)

عند س = ٠ ∴ ع = ٣ ، عند س = ٣ ع = ١٢

$$∴ \int_{٠}^{٣} س \sqrt{س^{٢} + ٣}\; ء س = \frac{١}{٢} \int_{٣}^{١٢} ع^{\frac{١}{٢}}\; ء ع = \left[\frac{١}{٣} ع^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٣}^{١٢}$$

$$= \frac{١}{٣}\left[\sqrt{(١٢)^{٣}} - \sqrt{(٣)^{٣}}\right] = ٧\sqrt{٣}$$

٢- فى بند **حاول أن تحل** ٤ ب: $د(س) = س^{٣} \sqrt{س^{٢} + ٣}$ **دالة فردية**

وفى بند **حاول أن تحل** ٣ب: $د(س) = |س^{٢} - ٤|$ **دالة زوجية**

للدوال الفردية والدوال الزوجية فى التكامل المحدد الخواص التالية:

> ١- إذا كانت الدالة د متصلة وفردية على الفترة [-أ ، أ] فإن:
>
> $$\int_{-أ}^{أ} د(س)\; ء س = \text{صفرًا}$$
>
> ٢- إذا كانت الدالة د متصلة وزوجية على الفترة [-أ ، أ] فإن:
>
> $$\int_{-أ}^{أ} د(س)\; ء س = ٢ \int_{٠}^{أ} د(س)\; ء س$$

باستخدام الخواص السابقة تحقق من صحة إجابتك فى حاول أن تحل ٣، ٤

مثال التكامل المحدد للدوال الفردية والزوجية

٥ أوجد:

أ $\int_{-٢}^{٢} \frac{س^{٣} - ٣س}{س^{٢} + ١}\; ء(س)$ ب $\int_{-٣}^{٣} (س^{٢} - ١)\; ء س$

الحل

أ د دالة متصلة على ع

$$∵ د(-س) = \frac{(-س)^{٣} - ٣(-س)}{(-س)^{٢} + ١} = - \frac{س^{٣} - ٣س}{س^{٢} + ١} = - د(س)$$

∴ **د دالة فردية ويكون:** $\int_{-٢}^{٢} \frac{س^{٣} - ٣س}{س^{٢} + ١} = \text{صفر}$

ب د دالة كثيرة الحدود متصلة على ع

$\because$ د(-س) = $(-س)^{٢} - ١ = س^{٢} - ١$ = د(س)

$\therefore$ د دالة زوجية ويكون: $\int_{-٣}^{٣} (س^{٢} - ١)\, ءس = ٢ \int_{٠}^{٣} (س^{٢} - ١)\, ءس$

$= ٢ \left[\frac{١}{٣} س^{٣} - س\right]_{٠}^{٣} = ٢ \times ٦ = ١٢$

حاول أن تحل

٥ أوجد

أ $\int_{-٣}^{٣} \frac{س}{١ + س^{٢}}\, ءس$ ب $\int_{-\pi}^{\pi} (٤ + \pi \, جتا \, ٢س)\, ءس$

تفكير ناقد

١ إذا كانت د دالة فردية متصلة على الفترة [-٣ ، ٥] ، $\int_{٣}^{٥}$ د(س) ءس = ٩ ما قيمة $\int_{-٣}^{٥}$ د(س) ءس ؟

٢ إذا كانت د دالة زوجية متصلة على الفترة [-٤، ٤] ، $\int_{-٤}^{٤}$ د(س) ءس = ٢٠
$\int_{٠}^{٢}$ د(س) ءس = ٦ ، ما قيمة $\int_{-٤}^{-٢}$ د(س) ءس ؟

تمارين ٣-٤

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١ إذا كان $\int_{-٢}^{٣}$ د(س) ءس = ١٢، $\int_{-٢}^{٥}$ د(س) ءس = ١٦ فإن $\int_{٣}^{٥}$ د(س) ءس يساوي:

أ -٢٨ ب -٤ ج ٤ د ٢٨

٢ إذا كانت د(س) = |س|، فإن $\int_{-٢}^{٢}$ د(س) ءس يساوي:

أ -١ ب صفر ج ٢ د ٤

أوجد قيمة كل مما يأتي:

٣ $\int_{-١}^{٣} س^{٣}\, ءس$ ٤ $\int_{١}^{٣} (٣س^{٢} - ٢)\, ءس$ ٥ $\int_{٠}^{٤} (٢س + ١)^{\frac{٣}{٢}}\, ءس$

٦ $\int_{٤}^{٠} \frac{ءن}{\sqrt{٨ - ن}}$ ٧ $\int_{٠}^{٢} س(س^{٢} - ٣)^{٢}\, ءس$ ٨ $\int_{٠}^{٢} س^{٢} \sqrt[٣]{س^{٣} + ١}\, ءس$

٩ $\int_{-١}^{٣} |س - ١|\, ءس$ ١٠ $\int_{-٤}^{٠} س\,(س + ٤)^{٣}\, ءس$ ١١ $\int_{١٠}^{٣} س \sqrt{س + ١}\, ءس$

١٢ $\int_{٠}^{١} ٢ \, جا \, \pi ع \, ءع$ ١٣ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} ظا \, ع \, قا^{٢} ع \, ءع$ ١٤ $\int_{٠}^{٣} (٢س - ٧هـ^{س})\, ءس$

أجب عن ما يأتي:

١٥ إذا كان $\int_{1}^{5}$ د(س) ى س = ١٠، $\int_{1}^{5}$ ر(س) ى س = -٢ احسب قيمة

أ $\int_{1}^{5}$ [د(س) + ر(س)] ى س   ب $\int_{1}^{5}$ [د(س) - ر(س)] ى س   ج $\int_{5}^{1}$ ٣ ر(س) ى س

١٦ إذا كان د دالة متصلة على الفترة [-٤ ، ٤]، $\int_{0}^{4}$ د(س) ى س = ٣ ، احسب قيمة

أ $\int_{0}^{4}$ [د(س) + ٢] ى س   ب $\int_{-4}^{4}$ د(س) ى س ، د فردية   ج $\int_{-4}^{4}$ د(س) ى س، د زوجية

١٧ إذا كانت د(س) = { ٢ عندما س $<$ ٢ ، س عندما س $\geqslant$ ٢ }   أوجد $\int_{0}^{6}$ د(س) ى س

٤ - ٤

المساحات فى المستوى

Areas in the Plane

سوف تتعلم

- التعرف على المساحة كتكامل محدد.
- إيجاد المساحة المحددة بمنحنى دالة ومحور السينات على فترة مغلقة.
- إيجاد المساحة المحددة بين منحنيين متقاطعين.

المصطلحات الأساسية

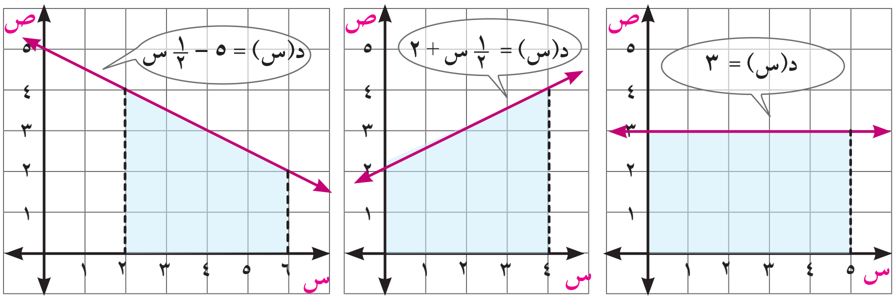
- مساحة Area
- وحدة مربعة Unite Squared

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسب الآلى

فكر و ناقش

١- احسب المساحة الملونة فى كل من الأشكال التالية هندسيًا.



الشكل (١) الشكل (٢) الشكل (٣)

٢- لكل من الأشكال السابقة احسب $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س حيث د(س) معادلة المنحنى، والمستقيمان س = أ ، س = ب يحدان المنطقة الملونة.

٣- قارن بين مساحة كل شكل وناتج التكامل المحدد له، ماذا تستنتج؟

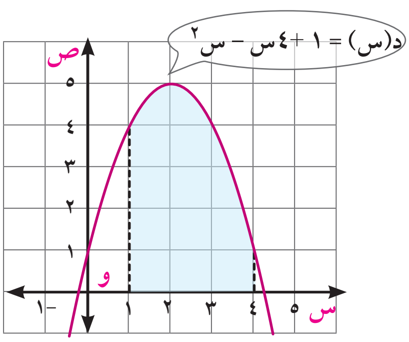
أولًا: مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات فى الفترة [أ، ب]

نظرية إذا كانت د دالة متصلة على الفترة [أ، ب] ، د (س) ⩾ ٠ فى هذه الفترة، م مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب فإن:

$$م = \int_{أ}^{ب} د(س)\, ء س$$

مثال — المساحة تحت المنحنى

١) يبين الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث د(س) = ١ + ٤س - س^{٢} أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمين س = ١، س = ٤



الحل

د متصلة على الفترة [١، ٤] ، د(س) > ٠ لكل س ∈ [١، ٤]

$\therefore$ م = $\int_{١}^{٤}$ د(س) ء س $= \int_{١}^{٤}$ (١ + ٤س - س^{٢}) ء س

$=$ [س + ٢س^{٢} - $\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{١}^{٤}$ = [٤ + ٣٢ - $\frac{٦٤}{٣}$] - [١ + ٢ - $\frac{١}{٣}$]

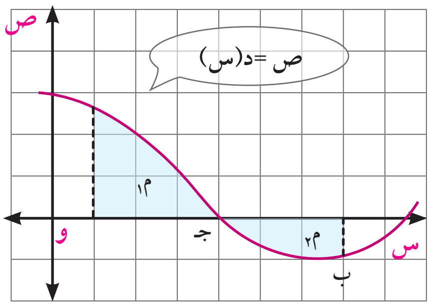
= ٣٦ - $\frac{٦٤}{٣}$ - ٣ + $\frac{١}{٣}$ = ١٢ وحدة مربعة

حاول أن تحل

(١) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = -١، س = ٢ حيث د(س) = ٣س^{٢} + ١

تفكير ناقد

إذا قطع منحنى الدالة د محور السينات عند س = جـ حيث جـ ∈]أ، ب[بين كيف يمكن حساب مساحة منطقة فوق محور لسينات ومحددة بمنحنى الدالة د، وأحد المستقيمين س = أ ، س = ب (المنطقة م$_{١}$)



لاحظ أن:

- لإيجاد المساحة يفضل إيجاد أصفار الدالة حتى لو أعطيت حدود التكامل والتي تجزئ مجال الدالة [أ، ب] إن وجدت إلى فترات جزئية.
- دراسة إشارة الدالة على الفترات الجزئية إن وجدت فإذا كانت:
  - موجبة أي د(س) > ٠ على الفترة [أ، جـ] فإن م$_{١}$ = $\int_{أ}^{جـ}$ د(س) ء س
  - سالبة أي د(س) < ٠ على الفترة [جـ، ب] فإن م$_{٢}$ = | $\int_{جـ}^{ب}$ د(س) ء س |

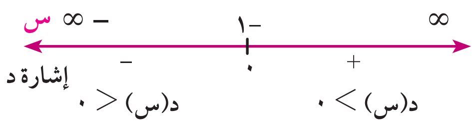
مثال المساحة فوق محور السينات ومنحنى دالة

(٢) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة د: د(س) = $\sqrt[٣]{٢\text{س} + ٢}$ والمستقيم س = ٣ وفوق محور السينات.

الحل

نوجد أصفار الدالة بوضع د(س) = ٠

$\therefore$ $\sqrt[٣]{٢\text{س} + ٢}$ = ٠ أي أن: س = -١



$\therefore$ المساحة المطلوبة م = $\int_{-١}^{٣}$ د(س) ء س

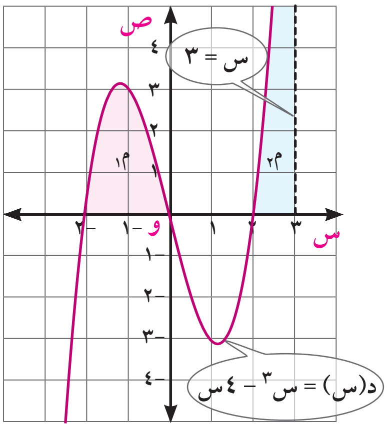
= $\int_{-١}^{٣}$ (٢س + ٢)$^{\frac{١}{٣}}$ ء س = [$\frac{٣}{٤ \times ٢}$ (٢س + ٢)$^{\frac{٤}{٣}}$]$_{-١}^{٣}$

= $\frac{٣}{٨}$ [٨$^{\frac{٤}{٣}}$ - ٠] = $\frac{٣}{٨}$ (٢^{٣})$^{\frac{٤}{٣}}$ = ٦ وحدات مربعة

حاول أن تحل

(٢) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د: د(س) = $\frac{٤س}{س^{٢} + ١}$ والمستقيم س = ٤ وتقع فوق محور السينات.

مثال — المساحة بين منحنى ومحور السينات



(٣) إذا كانت د:]-∞، ٣] ← ع حيث د(س) = س^{٣} - ٤س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات وتقع أعلى محور السينات.

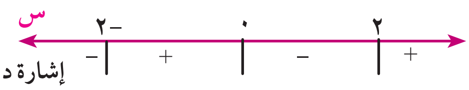
الحل

نوجد نقط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات (أصفار الدالة)

د(س) = س^{٣} - ٤س = س(س^{٢} - ٤) = س (س - ٢) (س + ٢)

عندما د(س) = ٠ $\therefore$ س = ٠ أو س = ٢ أو س = -٢

بدراسة إشارة الدالة د نجد



د(س) $\geqslant$ ٠ على الفترة [-٢، ٠] وعلى الفترة [٢، ٣]

$\therefore$ المساحة م = م$_{١}$ + م$_{٢}$ = $\int_{-٢}^{٠}$ (س^{٣} + ٤س) ءس + $\int_{٢}^{٣}$ (س^{٣} - ٤س) ءس

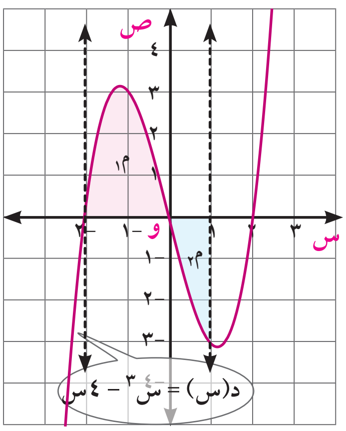
= $[\frac{١}{٤}$ س^{٤} - ٢س$^{٢}]_{-٢}^{٠}$ + $[\frac{١}{٤}$ س^{٤} - ٢س$^{٢}]_{٢}^{٣}$

= (٠ - (-٤)) + ($\frac{٨١}{٤}$ - ١٨ - (-٤))

= $\frac{١٢١}{٤}$ وحدة مربعة

ملاحظة هامة

لتعيين المساحة بين منحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمين س = -٢ ، س = ١ كما فى الرسم المقابل.



نجد أن:

د(س) $\geqslant$ ٠ عندما س $\in$ [-٢، ٠]، د(س) $\leqslant$ ٠ عندما س $\in$ [٠، ١]

$\therefore$ المساحة م = م$_{١}$ + م$_{٢}$

= $\int_{-٢}^{٠}$ (س^{٣} - ٤س) ءس + | $\int_{٠}^{١}$ (س^{٣} - ٤س) ءس |

= $[\frac{١}{٤}$ س^{٤} - ٢س$^{٢}]_{-٢}^{٠}$ + | $[\frac{١}{٤}$ س^{٤} - ٢س$^{٢}]_{٠}^{١}$ |

= ٤ + | ($\frac{١}{٤}$ - ٢) - ٠ | = ٤ + | -$\frac{٧}{٤}$ | = $\frac{٢٣}{٤}$ وحدة مربعة.

حاول أن تحل

③ أوجد مساحة المنطقة المستوية المحددة بالمنحنى ص = ٣ + ٢س - س^{٢} ومحور السينات.

تفكير ناقد

أوجد مساحة المنطقة المستوية المحددة بالمنحنى ص = ٣ + ٢س - س^{٢} والمستقيمات س = -١، س = ٤ ، ص = ٠

مثال **تطبيقات معمارية للمساحة**

④ صمم مهندس مدخل فندق على شكل قوس معادلته ص = - $\frac{١}{٢}$ (س - ١) (س - ٧) حيث س بالأمتار فإذا غُطى هذا المدخل بزجاج تكلفة المتر المربع الواحد منه ١٥٠٠ جنيه كم تكون تكلفة الزجاج؟

الحل

نمذجة المسألة:

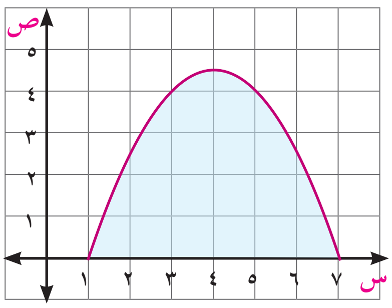
تكاليف زجاج مدخل الفندق = مساحة الزجاج بالأمتار المربعة × تكلفة المتر المربع الواحد

بفرض أن التكاليف الكلية ك جنيهًا ، مساحة الزجاج م متر مربع

∴ ك = ١٥٠٠ م ①

إيجاد مساحة الزجاج:

باعتبار المستوى الأفقي محورًا للسينات معادلته ص = ٠ ومعادلة قوس مدخل الفندق ص = د(س) حيث:



د(س) = - $\frac{١}{٢}$ (س - ١) (س - ٧)

∴ عند د(س) = ٠ فإن: س = ١ أو س = ٧

فتكون د(س) ≥ ٠ لكل س ∈ [١، ٧]

المساحة م = $\int_{١}^{٧}$ - $\frac{١}{٢}$ (س - ١) (س - ٧) ء س = $\int_{١}^{٧}$ (- $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٤س - $\frac{٧}{٢}$) ء س

= [- $\frac{١}{٦}$ س^{٣} + ٢س^{٢} - $\frac{٧}{٢}$ س]$_{١}^{٧}$ = $\frac{٤٩}{٣}$ - (- $\frac{٥}{٣}$) = ١٨ ② من ①، ②

∴ ك = ١٥٠٠ × ١٨ = ٢٧٠٠٠

أى أن: تكلفة تغطية مدخل الفندق بالزجاج تساوى ٢٧٠٠٠ جنيه

حاول أن تحل

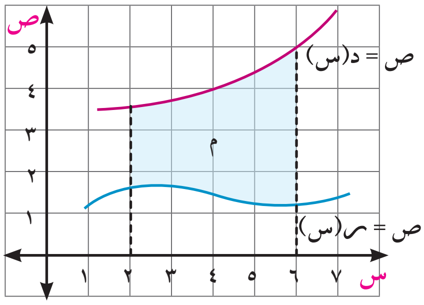
④ إذا كانت تكلفة تغطية المتر المربع الواحد من أرضية ممرات الفندق بالجرانيت ٤٠٠ جنيه وتم تغطية ٥ممرات متطابقة بالجرانيت مساحة كل منها محدودة بمنحنى الدالة د، والمستقيمين س = ٠ ، ص = ٠ حيث د(س) = ١٢ - $\frac{١}{٣}$ س^{٢}. **أوجد تكلفة تغطية الممرات الخمسة.**

ثانيًا: مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين منحنيين

تعريف

إذا كانت د، ر دالتين متصلتين على الفترة [أ، ب]، وكان د(س) $\geqslant$ ر (س) لكل س $\in$ [أ، ب]، فإن مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = د(س) ، ص = ر (س) والمستقيمين س = أ ، س = ب تعطى بالعلاقة

$م = \int_{أ}^{ب} [د(س) - ر(س)]\ ء س$



فى الشكل المقابل لاحظ أن:

د، ر متصلتان على الفترة [أ، ب]

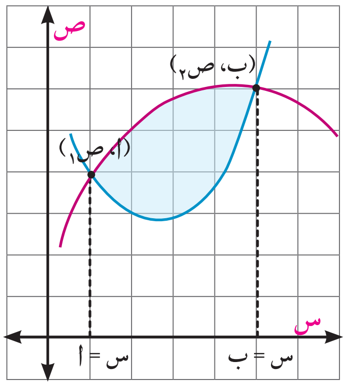
د(س) > ر (س) لكل س $\in$ [أ، ب]

إذا كانت المساحة بين منحنى د(س) ومحور السينات = $م_1$

والمساحة بين منحنى ر(س) ومحور السينات = $م_2$

فإن المساحة م بين منحنى د(س) ، ر(س) = $م_1 - م_2$

أى أن: $م = \int_{أ}^{ب} د(س)\ ء س - \int_{أ}^{ب} ر(س)\ ء س = \int_{أ}^{ب} [د(س) - ر(س)]\ ء س$

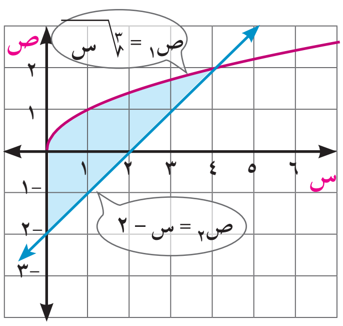


ملاحظة هامة : عندما تنحصر منطقة بين منحنيات متقاطعة، فإن حدود التكامل بالنسبة إلى س هى الإحداثيات السينية لنقط التقاطع.

مثال

مساحة منطقة بين منحنيين متقاطعين

٥ أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى $ص_1 = \sqrt{س}$ ، والمستقيم $ص_2 = س - ٢$ ومحور الصادات



الحل

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقط التقاطع نضع $ص_1 = ص_2$

$س - ٢ = \sqrt{س}$ بتربيع الطرفين

$س^2 - ٤س + ٤ = س$ أى: $س^2 - ٥س + ٤ = ٠$

$(س - ١)(س - ٤) = ٠$ $\therefore$ س = ١ أو س = ٤

عند س = ١ $ص_1 = \sqrt{١} = ١$، $ص_2 = ١ - ٢ = -١$

أى أن $ص_1 \neq ص_2$

$\therefore$ عند س = ١ لاتوجد نقط تقاطع للمنحنيين

عند س = ٤ $ص_1 = \sqrt{٤} = ٢$، $ص_2 = ٤ - ٢ = ٢$ $\therefore ص_1 = ص_2$

$\therefore$ حدا التكامل هما س = ٤ ، س = ٠ (محور الصادات) ومنحنيًا $ص_1$ ، $ص_2$ متصلان على الفترة [٠، ٤]

نأخذ قيمة إختيارية تنتمى إلى الفترة]٠، ٤[ولتكن س = ٢

عند س = ٢ $ص_1 = \sqrt{٢}$ ، $ص_2 = ٢ - ٢ = ٠$

أي أن $ص_١ \geqslant ص_٢$ لكل $س \in [٠، ٤]$

$\therefore$ مساحة المنطقة $= \int_{٠}^{٤} (ص_١ - ص_٢)\, ى س = \int_{٠}^{٤} (\sqrt{س} - س + ٢)\, ى س$

$= \left[\frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٢} س^٢ + ٢س\right]_{٠}^{٤} = \frac{٢}{٣} (٢^٢)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٢}(١٦) + ٢(٤) = \frac{١٦}{٣} - ٨ + ٨ = \frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة

حاول أن تحل

(٥) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالتين د، ر حيث:

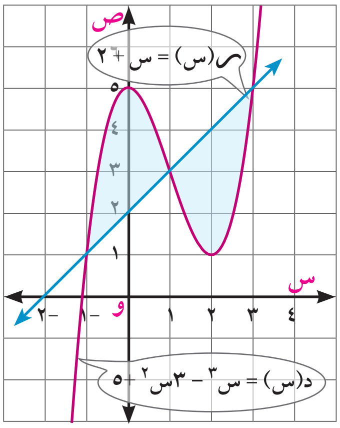
$د(س) = س^٢ - ٢$ ، $ر(س) = ٣ - (س + ١)^٢$

مثال — تعدد المناطق بين منحنيين متقاطعين

(٦) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومنحنى الدالة ر حيث

$د(س) = س^٣ - ٣س^٢ + ٥$، $ر(س) = س + ٢$

الحل:



◄ لإيجاد الإحداثيات السينية لنقط التقاطع:

نضع $د(س) = ر(س)$

$س^٣ - ٣س^٢ + ٥ = س + ٢$

$س^٣ - ٣س^٢ - س + ٣ = ٠$

$(س^٣ - ٣س^٢) - (س - ٣) = ٠$

$س^٢ (س - ٣) - (س - ٣) = ٠$

$(س - ٣)(س - ١)(س + ١) = ٠$

$\therefore س = ٣$ أو $س = ١$ أو $س = -١$

◄ يكون التكامل على الفترتين $[-١، ١]$ ، $[١، ٣]$ لإيجاد المساحة المطلوبة وهى عبارة عن مساحتين أى:

$م = م_١ + م_٢$

$م = \left| \int_{-١}^{١} [د(س) - ر(س)]\, ى س \right| + \left| \int_{١}^{٣} [د(س) - ر(س)]\, ى س \right|$

$= \left| \int_{-١}^{١} (س^٣ - ٣س^٢ + ٥ - س - ٢)\, ى س \right| + \left| \int_{١}^{٣} (س^٣ - ٣س^٢ - س + ٣)\, ى س \right|$

$= \left| \left[\frac{١}{٤} س^٤ - س^٣ - \frac{١}{٢} س^٢ + ٣س\right]_{-١}^{١} \right| + \left| \left[\frac{١}{٤} س^٤ - س^٣ - \frac{١}{٢} س^٢ + ٣س\right]_{١}^{٣} \right|$

$= |-٢ + ٦| + |٢٦ - ٣٠| = ٤ + ٤ = ٨$ وحدات مربعة

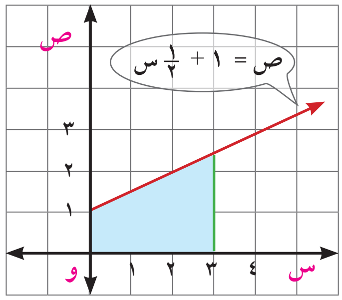
حاول أن تحل

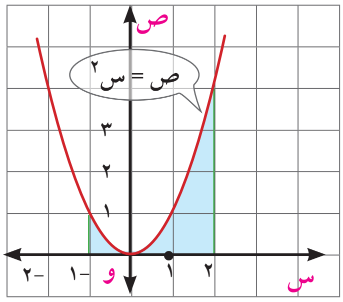
(٦) تقوم شركة إعلانات بإنتاج ملصق لتسويق سلعة ما فإذا كان الملصق على شكل منطقة محددة بمنحنى الدالتين د، ر حيث $د(س) = ٢س^٢$ ، $ر(س) = س^٤ - ٢س^٢$، س مقدرة بالديسيمتر. احسب المساحة اللازمة من الورق اللاصق لإنتاج ١٠٠٠ ملصق لهذه السلعة.

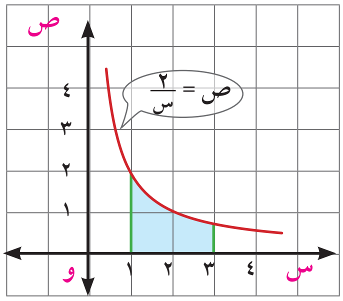
◄ باستخدام برنامج رسومى ارسم هذا الملصق وابحث أبسط الطرق لإيجاد مساحته.

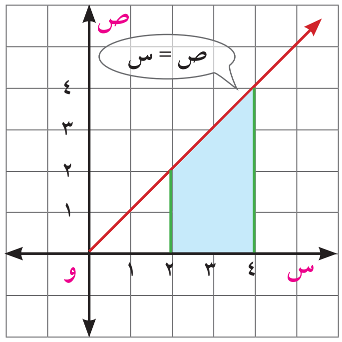
تمـــاريـن ٤ - ٤

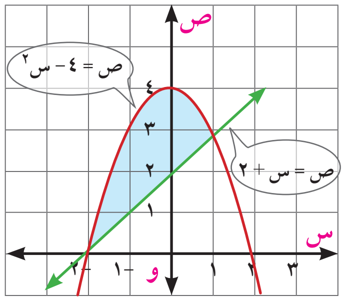
اكتب التكامل المحدد الذى يعطى المساحة الملونة فى كل مما يأتى واحسب قيمته.

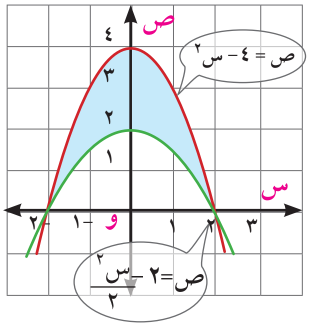
① 

② 

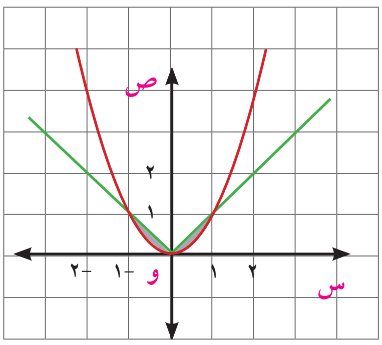
③ 

④ 

⑤ 

⑥ 

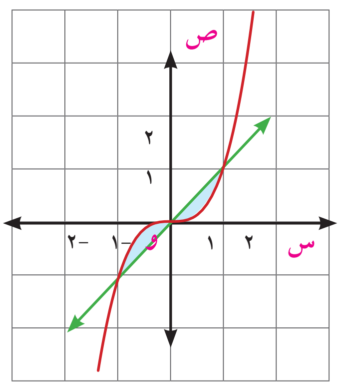
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.



⑦ مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = س^٢ ، ص = |س| تساوى:

أ ٢ $\int_{-١}^{٠}$ (س^٢ - س) ء س　　ب $\int_{٠}^{١}$ (س - س^٢) ء س

جـ ٢ $\int_{٠}^{١}$ (س - س^٢) ء س　　د $\int_{-١}^{١}$ (س - س^٢) ء س



⑧ مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س^٣ والمستقيم ص = س ، تساوى:

أ $\int_{-١}^{١}$ (س^٣ - س) ء س　　ب ٢ $\int_{٠}^{١}$ (س^٣ - س) ء س

جـ $\int_{٠}^{١}$ (س - س^٣) ء س　　د ٢ $\int_{٠}^{١}$ (س - س^٣) ء س

⑨ مساحة المنطقة المحددة بالمستقيمات ص = س، س = ٢ ، ص = ٠ ؛ تساوى:

أ $\frac{١}{٢}$　　ب ١

جـ ٢　　د ٤

⑩ مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س^٣ والمستقيمات ص = ٠، س = ٢ تساوى

أ ٨　　ب ٤　　جـ ٢　　د ١

في كل مما يأتي إحسب مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين:

(١١) المنحنى ص = ٥ - س^{٢} ومحور السينات والمستقيمين س = -٢ ، س = ١

(١٢) المستقيمات: س + ٢ص = ٩ ، س = ١ ، س = ٣ ، ص = ٠

(١٣) المنحنى ص = $\sqrt{\text{س} + ٤}$ والمستقيمات س = ٠ ، س = ٥ ، ص = ٠

(١٤) المنحنى ص = ٣ - ٢س - س^{٢} ومحور السينات

(١٥) المنحنى ص = $\frac{٤}{\text{س}^{٢}}$ والمستقيمات س = ١ ، س = ٤ ، ص = ٠

(١٦) منحنى الدالة د: د(س) = (٣ - س) (س - ١)^{٢} ومحوري الاحداثيات حيث د(س) ≥ ٠

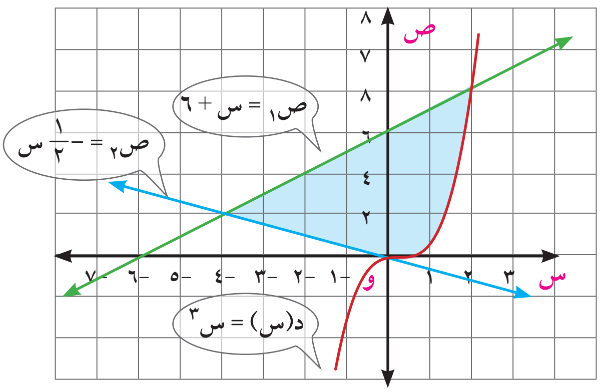
(١٧) منحنى الدالة د: د(س) = (س - ١) (س - ٢) (س - ٣) والمستقيمين س = ٤، ص = ٠ حيث د(س) ≥ ٠

(١٨) منحنى الدالتين د، ر حيث د(س) = ٢س^{٢} ، ر (س) = ٢س + ٤

(١٩) باستخدام التكامل المحدد أثبت أن مساحة المثلث الذى طول قاعدته يساوى أ وارتفاعه يساوى ب هى $\frac{١}{٢}$ أب

(٢٠) تفكير إبداعى: فى الشكل المقابل أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د والمستقيمين ص$_{١}$، ص$_{٢}$ حيث:

د(س) = س^{٣} ، ص$_{١}$ = س + ٦، ص$_{٢}$ = -$\frac{١}{٢}$ س



٤ - ٥

حجوم الأجسام الدورانية

Volumes of Revolution Solids

سوف تتعلم

- التعرف على الحجم كتكامل محدد.
- استخدام التكامل المحدد فى إيجاد الحجوم.
- إيجاد حجم دورانى ناتج عند دوران منطقة محددة بمنحنيين.

المصطلحات الأساسية

- محور الدوران *Axis of Revolution*
- مجسم دورانى *Solid of Revolution*

الأدوات المستخدمة

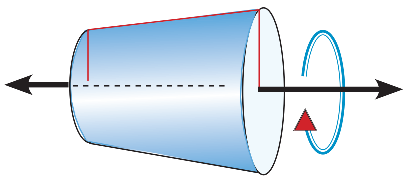
- آلة حاسبة علمية .
- برامج رسومية.

فكر و ناقش

هل شاهدت صانع الفواخير وهو يحول التراب إلى تحف وأوانى طهى طعام بخلط الطين الأسوانى بالماء وتقطيعه ووضعه حول محور يدور؛ فيشكله بأصابعه وأدواته؛ لينتج أجسامًا ذات أشكال جذابة. بما تسمى هذه الأجسام؟

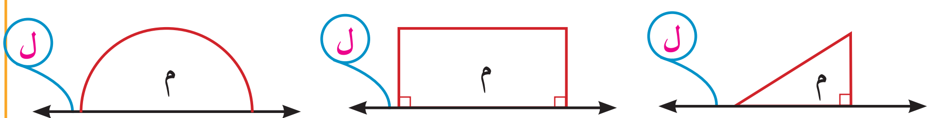
- تصمم العبوات البلاستيكية لتعبئة المياة الغازية والعصائر والزيوت بأحجام مختلفة وسعات متعددة. كيف يمكن حساب حجمها أو سعتها عند تصميمها؟

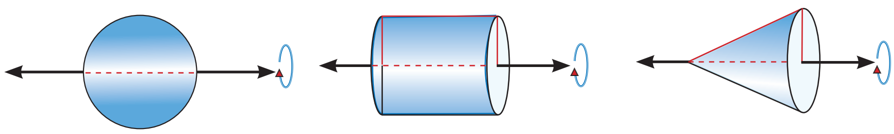
المجسم الدورانى *Solid of Revolution*



ينشأ المجسم الدورانى من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول مستقيم ثابت فى مستويها يسمى «محور الدوران».

توضح الأشكال التالية أمثلة لمجسمات دورانية ترسمها المساحة م عند دورانها دورة كاملة حول المستقيم ل





كرة　　　　أسطوانة قائمة　　　　مخروط قائم

الحجم الدورانى Volumes of Revolution

أولًا: حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة مستوية حول محور

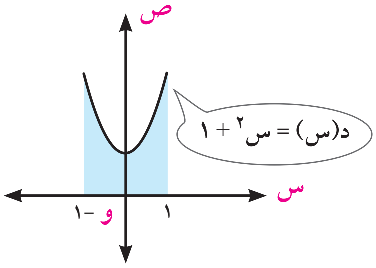
نظرية

إذا كانت د دالة متصلة على الفترة [أ، ب] ، د(س) $\geqslant$ ٠ لكل س $\in$ [أ، ب] فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المساحة المحددة بالمنحنى ص = د(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات هو: ح = $\pi \int_{أ}^{ب} [د(س)]^٢$ ء س

مثال

دوران حول محور السينات

١ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = -١، س = ١ دورة كاملة محور السينات علمًا بأن د(س) = س^٢ + ١

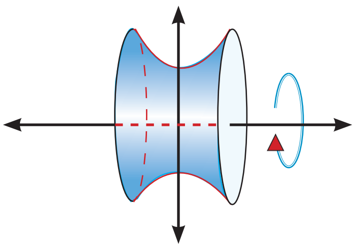


الحل:

الدالة د كثيرة الحدود متصلة على الفترة [-١، ١]،

د(س) $\geqslant$ ٠ لكل س $\in$ [أ، ب]

بفرض أن حجم الجسم الناشئ من الدوران = ح



$\therefore$ ح = $\pi \int_{-١}^{١} (س^٢ + ١)^٢$ ء س

= $\pi \int_{-١}^{١} (س^٤ + ٢س^٢ + ١)$ ء س

= $\pi \left[\frac{١}{٥}س^٥ + \frac{٢}{٣}س^٣ + س\right]_{-١}^{١} = \frac{٥٦}{١٥}\pi$ وحدة مكعبة

حاول أن تحل

١ أوجد حجم الجسم الناشىء من دوران المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٣ دورة كاملة حول محور السينات علمًا بأن د(س) = س ما اسم المجسم الناشئ؟ بين كيف تتحقق هندسيًّا من صحة إجابتك.

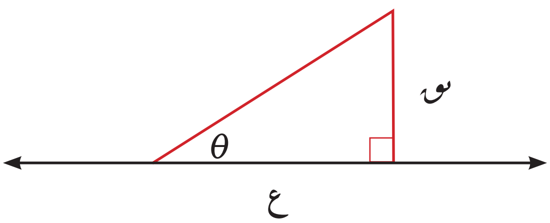
مثال

تطبيقات الحجوم

٢ باستخدام التكامل أثبت أن حجم المخروط الدائرى القائم يساوى $\frac{\pi}{٣}$ نو^٢ ع حيث نو طول نصف قطر قاعدته، ع ارتفاعه.

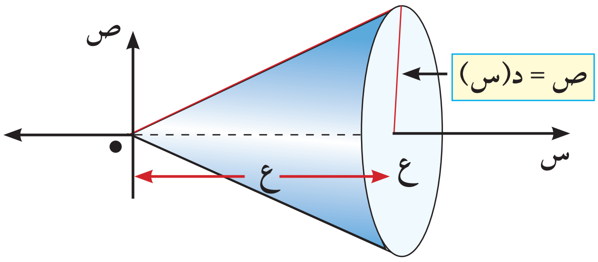
الحل:

ينتج المخروط الدائرى القائم عن دوران مثلث قائم الزاوية بحيث يقع أحد ضلعى القائمة على محور السينات دورة كاملة حول محور السينات.



نوجد العلاقة بين س ، ص = د(س)

$ظا \theta = \frac{ص}{س}$ (١) $\therefore ص = س \, ظا \theta = د(س)$



$\therefore ح = \pi \int_{١}^{ب} [د(س)]^٢ \, ء س = \pi \int^{ع} س^٢ ظا^٢ \theta \, ء س$

$= [\frac{\pi}{٣} س^٣ ظا^٢ \theta]^{ع} = \frac{\pi}{٣} ع^٣ ظا^٢ \theta$ (٢)

من (١) $ظا \theta = \frac{ص}{س} = \frac{نق}{ع}$

$\therefore ظا^٢ \theta = \frac{نق^٢}{ع^٢}$

بالتعويض فى (٢) $\therefore ح = \frac{\pi}{٣} \frac{نق^٢}{ع^٢} \times ع^٣ = \frac{\pi}{٣} نق^٢ ع$

حاول أن تحل

(٢) باستخدام التكامل أثبت أن:

أ) حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \pi نق^٣$ (نق طول نصف قطر الكرة)

ب) حجم الأسطوانة الدائرية القائمة = $\pi نق^٢ ع$

(نق طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة ، ع ارتفاعها)

تذكر أن

معادلة الدائرة التى مركزها نقطة الأصل (٠، ٠) وطول نصف قطرها (نق) هى: $س^٢ + ص^٢ = نق^٢$

مثال

دوران حول محور السينات

(٣) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ ومحور السينات، حيث أ، ب ثابتان، دورة كاملة حول محور السينات.

الحل:

$\because$ الدوران حول محور السينات $\therefore ص^٢ = ب^٢ (١ - \frac{س^٢}{أ^٢})$

حدود التكامل:

ص = ٠ $\therefore س^٢ = أ^٢$ **أى أن** س = - أ ، س = أ

$ح = \pi \int_{-أ}^{أ} ب^٢ (١ - \frac{س^٢}{أ^٢}) \, ء س = ٢ \pi ب^٢ \int_{.}^{أ} (١ - \frac{س^٢}{أ^٢}) \, ء س$ **(لماذا؟)**

$= ٢ \pi ب^٢ [س - \frac{س^٣}{٣أ^٢}]_{.}^{أ} = ٢ \pi ب^٢ [أ - \frac{١}{٣} أ]$

$= \frac{٤}{٣} \pi ب^٢ أ$ وحدة مكعبة.

حاول أن تحل

(٣) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = ٢س - $س^٢$ ومحور السينات، دورة كاملة حول محور السينات.

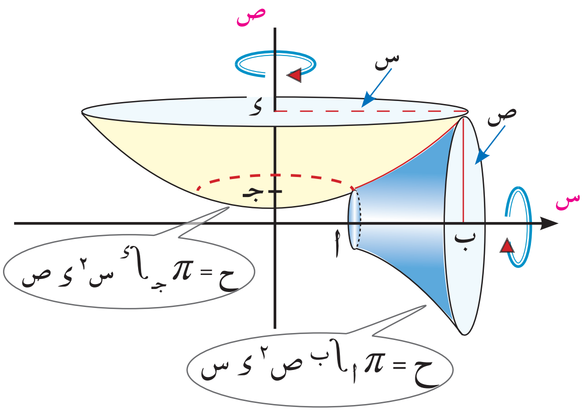
ملاحظة هامة

إذا كان دوران المنطقة المستوية حول محور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب فإن:

$ح = \pi \int_{أ}^{ب} ص^{٢} \, ء س$

إذا كان دوران المنطقة المستوية حول محور الصادات والمستقيمين ص = جـ ، ص = ء فإن:

$ح = \pi \int_{جـ}^{ء} س^{٢} \, ء ص$



مثال

دوران حول محور الصادات

④ أوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س^{٢} + ١ ومحور الصادات والمستقيم ص = ٥ دورات كاملة حول محور الصادات.

الحل:

∵ ص = س^{٢} + ١ والدوران حول محور الصادات

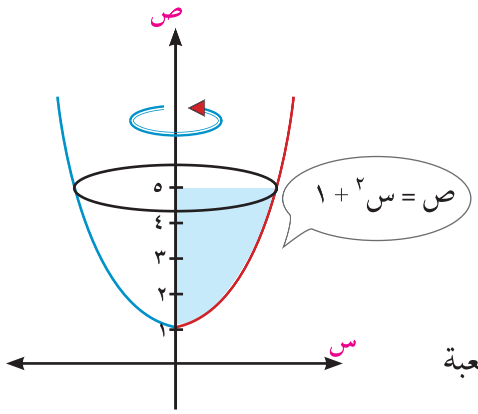
∴ س^{٢} = ص - ١

عند س = ٠ ص = ١

حدود التكامل ص = ١ ، ص = ٥

$ح = \pi \int_{جـ}^{ء} س^{٢} \, ء ص = \pi \int_{١}^{٥} (ص - ١) \, ء ص$

$= [\frac{\pi}{٢} (ص - ١)^{٢}]_{١}^{٥} = \frac{\pi}{٢} (١٦ - ٠) = ٨\pi$ وحدة مكعبة



حاول أن تحل

④ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س^{٢} ومحور الصادات والمستقيمين ص = ٠، ص = ٦ دورات كاملة حول محور الصادات.

ثانيًا: حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة محددة بمنحنيين

نظرية

إذا كانت د، ر دالتين متصلتين على الفترة [أ، ب] ، د(س) ≥ ٠ ، هـ (س) ≥ ٠ لكل س ∈ [أ، ب]، فإن حجم الجسم الدوراني ح الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين والمستقيمين س = أ ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات هو:

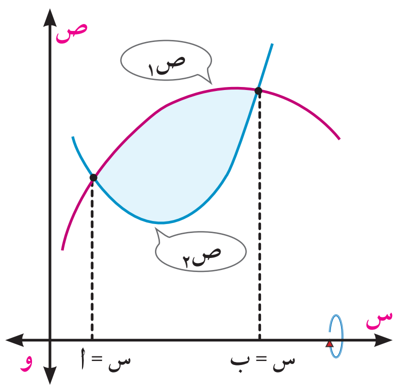
$ح = \pi \int_{أ}^{ب} [د(س)^{٢} - ر(س)^{٢}] \, ء س$

لاحظ أن

١- إذا دارت المنطقة المحددة بالمنحنيين المتقاطعين $ص_١ = د(س)$،

$ص_٢ = ر(س)$ حيث $ص_١ \geqslant ص_٢$ لكل $س \in [أ، ب]$

وهى المنطقة الملونة بالشكل المقابل، دورة كاملة حول محور السينات فإن الإحداثيين السينيين لنقطتى تقاطع المنحنيين هما حدود التكامل أ، ب حيث أ < ب و يكون حجم الجسم الناشئ ح هو:



$$ح = \pi \int_{أ}^{ب} [(ص_١)^٢ - ص_٢^٢] \, ء س$$

أى: $ح = \pi \int_{أ}^{ب} ص_١^٢ \, ء س - \pi \int_{أ}^{ب} ص_٢^٢ \, ء س$

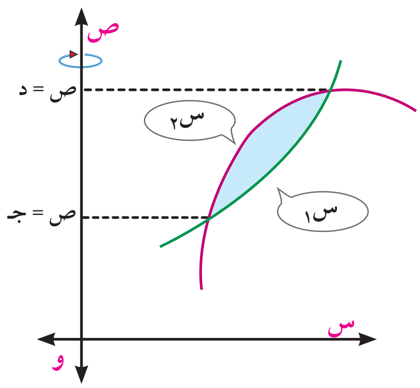
٢- إذا دارت المنطقة المحددة بالمنحنيين المتقاطعين

$س_١ = د(ص)$ ، $س_٢ = ر(ص)$ حيث $س_١ \geqslant س_٢$

لكل $ص \in [جـ ، ء]$ دورة كاملة حول محور الصادات

فإن الإحداثيات الصاديين لنقطتى التقاطع هما

حدود التكامل جـ، ء حيث جـ < ء ويكون



$$ح = \pi \int_{جـ}^{ء} [(س_١)^٢ - س_٢^٢] \, ء ص$$

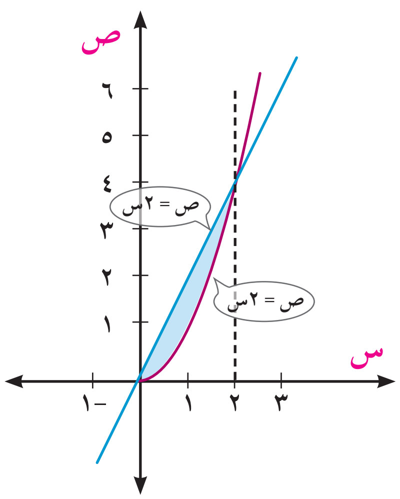
أى: $ح = \pi \int_{جـ}^{ء} س_١^٢ \, ء ص - \pi \int_{جـ}^{ء} س_٢^٢ \, ء ص$

مثال

دوران منطقة محددة بمنحنيين حول محور السينات

⑤ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = س^٢$ والمستقيم $ص = ٢ س$ دورة كاملة حول محور السينات.

الحل:



بفرض $ص_١ = س^٢$ ، $ص_٢ = ٢ س$

لإيجاد نقط التقاطع نضع $ص_١ = ص_٢$

$\therefore س = ٠$ أو $س = ٢$

$\because ص_٢ \geqslant ص_١$ لكل $س \in [٠ ، ٢]$ كما هو واضح من الشكل

$\therefore ح = \pi \int_{أ}^{ب} (ص_٢^٢ - ص_١^٢) \, ء س$

$= \pi \int_{٠}^{٢} (٢ س)^٢ - (س^٢)^٢ \, ء س$

$\therefore ح = \pi \int_{٠}^{٢} (٤س^٢ - س^٤) \, ء س$

$= \pi \left[\frac{٤}{٣}س^٣ - \frac{١}{٥}س^٥\right]_{٠}^{٢}$

$= \pi \left(\frac{٣٢}{٣} - \frac{٣٢}{٥}\right) = ٣٢ \pi \times \frac{٢}{١٥} = \frac{٦٤ \pi}{١٥}$ وحدة مكعبة

حاول أن تحل

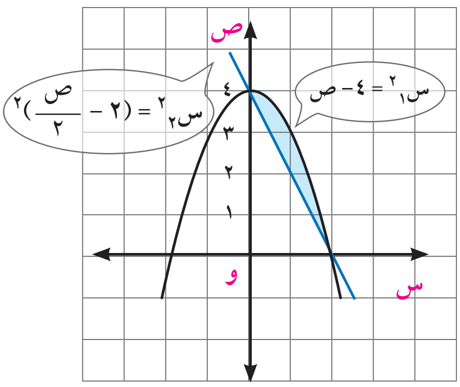
٥) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين $ص = \sqrt{س}$ ، $ص = س^{٢}$ دورة كاملة حول محور السينات.

مثال

دوران منطقة محددة بمنحنيين حول محور الصادات

٦) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = ٤ - س^{٢}$، والمستقيم $٢س + ص = ٤$ دورة كاملة حول محور الصادات.

الحل:



∵ الدوران حول محور الصادات

∴ $س_{١}^{٢} = ٤ - ص$ ، $س_{٢}^{٢} = (٢ - \frac{ص}{٢})^{٢}$

عند نقط التقاطع $س_{١} = س_{٢}$

$٤ - ص = (٢ - \frac{ص}{٢})^{٢}$ ∴ $\frac{ص^{٢}}{٤} - ص = $ صفر

$ص (ص - ٤) = ٠$ $ص = ٠$ ، $ص = ٤$

ويكون $س_{١}^{٢} > س_{٢}^{٢}$ لكل $س \in [٠ ، ٤]$

$ح = \pi \int_{جـ}^{ء} (س_{١}^{٢} - س_{٢}^{٢}) \, ء ص = \pi \int_{٠}^{٤} [(٤ - ص) - (٢ + \frac{ص}{٢})^{٢}] \, ء ص$

$= \pi \int_{٠}^{٤} (ص - \frac{ص^{٢}}{٤}) \, د ص = \pi [\frac{١}{٢} ص^{٢} - \frac{ص^{٣}}{١٢}]_{٠}^{٤}$

$= \pi [٨ - \frac{١٦}{٣}] = \frac{٨}{٣} \pi$ وحدة مكعبة

حاول أن تحل

٦) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين $٢ص = س^{٢}$، $ص = \sqrt{س}$ دورة كاملة حول محور الصادات.

تمارين ٤ – ٥

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) حجم الجسم الناشىء من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = ٢\sqrt{س}$ ، $ص = ٠$ ، $س = ١$ دورة كاملة حول محور السينات يساوى

أ $- \pi$ ب ٠ جـ π د ٢π

٢) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = \frac{١}{س}$ والمستقيمين $ص = ١$، $ص = ٢$ ومحور الصادات دورة كاملة حول محور الصادات يساوى

أ $\frac{\pi}{٤}$ ب $\frac{\pi}{٢}$ جـ π د ٢π

(٣) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = س^{٢}$ والمستقيم $ص = ١$ دورة كاملة حول محور الصادات يساوى

أ) π ب) $\frac{١}{٢}\pi$ ج) $\frac{١}{٤}\pi$ د) ٢π

(٤) $\pi \int_{-٢}^{٢} (٤ - س^{٢})\, ء س$ ، هو حجم

أ) كرة طول نصف قطرها ٤ وحدات
ب) مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٤ وحدات
ج) كرة طول نصف قطرها ٢ وحدة
د) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٤ وحدات

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات والمستقيمات المعطاة دورة كاملة حول محور السينات فى كل مما يأتى:

(٥) $ص = س$ ، $س = ٣$ ، $ص = ٠$
(٦) $ص = ٣ - س$ ، $س = ٠$ ، $ص = ٠$
(٧) $ص = \frac{١}{س}$ ، $س = ١$ ، $س = ٤$ ، $ص = ٠$
(٨) $ص = |س|$ ، $س = -٢$ ، $س = ٤$ ، $ص = ٠$

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات والمستقيمات المعطاة دورة كاملة حول محور الصادات فى كل مما يأتى:

(٩) $ص = س$ ، $ص = ١$ ، $س = ٠$
(١٠) $ص = س^{٢}$ ، $س = ٠$ ، $ص = ٠$ ، $ص = ٨$
(١١) $ص = ٤ - س^{٢}$ ، $س = ٠$ ، $ص = ٠$
(١٢) $ص = س^{٣}$ ، $س = ٠$ ، $ص = ٠$ ، $ص = ٨$
(١٣) $س + ٢ص = ٠$ ، $س = ٠$ ، $ص = ٠$ ، $ص = ٣$

أجب عن كل مما يأتى:

(١٤) أوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص^{٢} = ٤ - س$ والمستقيم $س = ٠$ عندما تدور هذه المنطقة دورة كاملة.

أولا: حول محور السينات **ثانيًا**: حول محور الصادات

(١٥) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = \frac{٤}{س}$ والمستقيم $س + ص = ٥$ دورة كاملة حول محور السينات.

(١٦) تفكير إبداعى: إذا كانت النقط أ(-٢، ٠) ، ب(١، ٥) ، جـ (٤، ٠) رؤوس المثلث أ ب جـ فأوجد حجم الجسم الناشىء عن دوران المثلث أ ب جـ دورة كاملة حول محور السينات.

ملخص الوحدة

تفاضلى الدالة: إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة تحوى س ، ص = د(س) فإن:
ء ص = دَ (س) ء س حيث ء ص تفاضلى ص ، ء س تفاضلى س.

التكامل بالتعويض: إحدى طرق إيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين وبه يحول التكامل المعطى إلى تكامل قياس معروف، فإذا كانت ع = ر (س) دالة قابلة للاشتقاق فإن:
$\int$ د(ر (س)) رَ (س) ء س = $\int$ د(ع) ء ع

التكامل بالتجزئ: إحدى طرق إيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين ليست أحدهما مشتقة للأخرى، فإذا كانت ص، ع دالتين قابلتين للاشتقاق على فترة ف فإن: $\int$ ص ء ع = ص ع - $\int$ ع ء ص

جدول التكامل الأساسية (القياسية)	
$\int$ س^{ن} ء س = $\frac{س^{ن+1}}{ن+1}$ + ث　　ن $\in$ ع - {-١}	$\int$ قا س طا س ء س = قا س + ث س $\neq$ $\frac{٢ن+١}{٢}\pi$ ، ن $\in$ ص
$\int$ جا س ء س = - جتا س + ث	$\int$ قتا ظتا س ء س = - قتا س + ث س $\neq$ ن π ، ن $\in$ ص
$\int$ جتا س ء س = - جا س + ث	$\int$ هـ^{س} ء س = هـ^{س} + ث
$\int$ قا^{٢} س ء س = طا س + ث س $\neq$ $\frac{٢ن+١}{٢}\pi$ ، ن $\in$ ص	$\int$ أ^{س} ء س = $\frac{١}{لو_{هـ} أ}$ أ^{س} + ث　　أ > ٠ ، أ $\neq$ ١
$\int$ قتا^{٢} س ء س = - ظتا س + ث س $\neq$ ن π ، ن $\in$ ص	$\int$ $\frac{١}{س}$ ء س = لو$_{هـ}$ | س | + ث　　س $\neq$ ١

- إضافة الثابت (ب) إلى المتغير المستقل لا يؤثر على صيغة التكامل.
- عند ضرب المتغير س بالمعامل (أ) يحتفظ التكامل بصيغته السابقة إلا أنه يقسم على هذا المعامل.

التكامل المحدد:

نظرية:

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] وكانت ت أى مشتقة عكسية للدالة د على نفس الفترة، فإن $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س = ت (ب) - ت (أ)

خواص المتكامل المحدد:

(١) $\int_{ب}^{أ}$ د(س) ء س = - $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س　　(٢) $\int_{أ}^{أ}$ د(س) ء س = ٠

③ $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ى س = \int_{أ}^{جـ} د(س)\,ى س + \int_{جـ}^{ب} د(س)\,ى س$ لكل جـ $\in$ [أ، ب]

④ $\int_{-أ}^{أ} د(س)\,ى س = ٠$ (د دالة فردية)

⑤ $\int_{-أ}^{أ} د(س)\,ى س = ٢ \int_{٠}^{أ} د(س)\,ى س$ (د دالة زوجية)

- مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة المتصلة د على الفترة [أ، ب] والمستقيمين

  س = أ، س = ب حيث د(س) $\geqslant$ ٠ هي: $م = \int_{أ}^{ب} د(س)\,ى س$

- مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالتين د، ر المتصلتين على الفترة [أ، ب] والمستقيمين

  س = أ، س = ب حيث د(س) $\geqslant$ ر (س) $>$ ٠ هي: $م = \int_{أ}^{ب} [د(س) - د(ر)]\,ى س$

الحجوم الدورانية:

ينشأ المجسم الدوراني من دوان منطقة مستوية دورة كاملة حول خط مستقيم يسمى محور الدوران.

- حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د المتصلة على الفترة [أ، ب] ومحور السينات والمستقيمين س = أ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات حيث د(س) $\geqslant$ ٠ هو

  $ح = \pi \int_{أ}^{ب} [د(س)]^{٢}\,ى س$

- حجم الجسم الناشىء من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالتين د، ر المتصلتين على الفترة [أ، ب] والمستقيمين س = أ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات حيث د(س) $\geqslant$ ر (س) $>$ ٠ هو:

  $ح = \pi \int_{أ}^{ب} [(د(س))^{٢} - (ر(س))^{٢}]\,ى س$

تمارين عامة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كان د(س) = $\int$ (٣س^{٢} - ٥) ى س وكان د(٢) = ٣ ، فإن د(-٢)

أ -٦ ب -٣ ج ٧ د ١٢

(٢) إذا كان $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ = س + $\frac{١}{\text{س}}$، ص = $\frac{١}{٢}$ عند س = ١، عندما س = هـ فإن ص تساوى:

أ هـ^{٢} - هـ ب $\frac{\text{هـ}^{٢} - ١}{٢}$ ج $\frac{\text{هـ}^{٢} + ١}{٤}$ د $\frac{\text{هـ}^{٢}}{٢}$ + ١

(٣) $\int$ ظا^{٢} س ى س يساوى

أ ظا س - س + ث ب ظا س + س + ث ج قا^{٤} س + ث د $\frac{١}{٣}$ ظا^{٣} س + ث

(٤) إذا كان $\int_{٢}^{٥}$ د(س) ى س = ٤، فإن $\int_{٢}^{٥}$ [٣ د(س) - ١] ى س يساوى

أ ٩ ب ١١ ج ١٢ د -٨

(٥) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى د(س) = س^{٢} ومحور السينات والمستقيمين س = -٢، س = ٢ دورة واحدة حول محور السينات يساوى

أ $\frac{١٦ \pi}{٥}$ ب $\frac{٣٢ \pi}{٥}$ ج $\frac{٦٤ \pi}{٥}$ د ٤ π

أوجد تفاضلى كل من:

(٦) ص = ٣س^{٢} - ١

(٧) ص = $\sqrt{(٢\text{س} + ٣)^{٥}}$

(٨) ص = (س + $\frac{١}{\text{س}}$)^{٣}

(٩) ص = هـ$^{-٥\text{س}}$

(١٠) ص = هـ$^{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}}$

(١١) ص = هـ$^{\text{حتا ٢س}}$

(١٢) ع = لو$_{\text{هـ}}$ (س^{٢} + ١)

(١٣) ع = (لو$_{\text{هـ}}$ $\frac{١٠}{\text{س}}$)^{٢}

(١٤) ع = لو$_{\text{هـ}}$ ظتا (٣س - ١)

عبر عن كل مما يأتى باستخدام تكامل واحد

(١٥) $\int_{٠}^{٥}$ س^{٢} ى س + $\int_{-٢}^{٠}$ س^{٢} ى س

(١٦) $\int_{-٤}^{-١}$ $\sqrt{\text{س} + ٦}$ ى س - $\int_{٤}^{-١}$ $\sqrt{\text{س} + ٦}$ ى س

(١٧) $\int_{٢}^{٦}$ ك ى س + $\int_{٣}^{٢}$ ك ى س

(١٨) $\int_{٠}^{٤}$ ٢س^{٢} ى س + $\int_{٤}^{٥}$ س^{٢} ى س

أجب عن ما يأتى:

(١٩) إذا كان $\int_{٢}^{٤}$ د(س) ى س = ٥، $\int_{٢}^{٤}$ ر(س) ى س = -٣ فأوجد:

أ $\int_{٢}^{٤}$ ٣د(س) ى س ب $\int_{٤}^{٢}$ ٢ ر(س) ى س

ج $\int_{٢}^{٤}$ [٣د(س) - ٢ ر(س)] ى س د $\int_{٢}^{٤}$ [٣ر(س) + ٤س] ى س

(٢٠) إذا كان دً(س) = ٦س - ٤ ، دَ (١) = ٢ ، د(٠) = -٤ فأوجد د(س)

أوجد التكاملات المحددة التالية:

(٢١) $\int_{٢}^{٤}$ (س^{٢} + $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$) ى س

(٢٢) $\int_{١}^{٣}$ $\frac{٦ - \text{س}^{٤}}{٢ \text{س}^{٢}}$ ى س

(٢٣) $\int_{١}^{٤}$ $\frac{\text{س} - ١}{\sqrt{\text{س}} - ١}$ ى س

(٢٤) $\int_{-١}^{١} \frac{\text{س} + ٨}{\sqrt[٣]{\text{س}} + ٢} \, \text{ء س}$　　(٢٥) $\int_{-٤}^{٤} \sqrt{١٦ - \text{س}^٢} \, \text{ء س}$　　(٢٦) $\int_{٠}^{٢} \sqrt{٤ - \text{س}^٢} \, \text{ء س}$

باستخدام التعويض المناسب أوجد التكاملات الآتية:

(٢٧) $\int \text{س} (\text{س} - ٥)^٣ \, \text{ء س}$　　(٢٨) $\int \frac{\text{ء س}}{\sqrt{\text{س}} \, (١ + \sqrt{\text{س}})^٣}$　　(٢٩) $\int \text{س قا}^٢ (\text{س}^٢ + ٢) \, \text{ء س}$

(٣٠) $\int \text{قا}^٤ \text{س طاس ء س}$　　(٣١) $\int \text{س هـ}^{\text{س}^٢ + ٣} \, \text{ء س}$　　(٣٢) $\int \frac{\text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{س}}{\text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{س}^٢} \, \text{ء س}$

باستخدام التجزىء المناسب أوجد التكاملات الآتية:

(٣٣) $\int ٣\text{س} \sqrt{٢\text{س} + ٣} \, \text{ء س}$　　(٣٤) $\int \text{س}^٤ \, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س ء س}$　　(٣٥) $\int_{١}^{٢} ٤\text{س هـ}^{٢\text{س}} \, \text{ء س}$

أجب عن يلي:

(٣٦) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = ٧ + ٢س - س^٢ ، ص = (س - ١)^٢

(٣٧) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = ٩ - س^٢، ص = س^٢ + ١ والمستقيمين س = ٠، س = ٣

(٣٨) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = ٩ - س^٢ ، ص = س^٢ + ١ ومحور السينات والمستقيمين س = ٠، س = ٣

(٣٩) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\frac{١}{\text{س} - ١}$ والمستتقيمين س = ٢ ، س = ٤ ومحور السينات دورة كاملة حول.

أ) محور السينات　　ب) محور الصادات

(٤٠) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\sqrt{٢\text{س}}$ ومحور السينات والمماس للمنحنى عند النقطة (٢، ٢) الواقعة عليه عندما تدور هذه المنطقة دورة كاملة حول محور السينات.

اختبار تراكمي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الآتية:

(١) $\int$ (٤ - قتا س ظتا س) ء س يساوي:

أ) ٤س - قتا س + ث　　ب) ٤س + قتا س + ث

ج) ٤س - ظتا س + ث　　د) ٤س + ظتا س + ث

(٢) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} - ٣}$ ء س يساوي:

أ) $-\frac{١}{٢}$ (هـ^{س} - ٣) + ث　　ب) - لو$_{هـ}$ |هـ^{س} - ٣| + ث

ج) لو$_{هـ}$ |هـ^{س} - ٣| + ث　　د) $\frac{١}{٢}$ لو$_{هـ}$ |هـ^{س} - ٣| + ث

(٣) $\int_{٠}^{٢}$ (٢ - |س|) ء س يساوي:

أ) ٤　　ب) ٢　　ج) ١　　د) صفر

(٤) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ ومحور السينات مقدرة بالوحدات المربعة يساوي: ....

أ) ٢　　ب) ٤　　ج) ٢ π　　د) ٤ π

(٥) إذا كان $\int_{١}^{٣}$ د(س) ء س = ٥ ، $\int_{٣}^{١}$ ر(س) = ٧، فإن $\int_{١}^{٣}$ (٤ د(س) + ر(س) + ٣) ء س يساوي:

أ) -١٢　　ب) -٧　　ج) ١٢　　د) ١٩

(٦) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بين المنحنى ص = $\frac{٢}{س}$ والمستقيمات س = ١، س = ٤، ص = ٠ دورة كاملة حول محور السينات مقدرًا بالوحدات المكعبة يساوي: ....

أ) $\frac{\pi}{٣}$　　ب) $\frac{\pi}{٢}$　　ج) ٢ π　　د) ٣ π

اجب عن ما يأتي:

(٧) أوجد التكاملات الآتية:

أ) $\int \frac{س + ٣}{\sqrt{س^{٢} + ٦س}}$ ء س　　ب) $\int$ س^{٢} $\sqrt{س - ٣}$ ء س

(٨) إذا كانت د(س) = $\int$ (س + ١) (٢س^{٢} + ٤س - ١) ء س، د(-٢) = ١　　**فأوجد د(٣)**

(٩) أوجد التكاملات الآتية:

أ) $\int$ طا س قا^{٣}س ء س　　ب) $\int \sqrt{١ + جا س}$ جتا س ء س

١٠ أوجد التكاملات الآتية:

أ $\int$ س^{٢} لو$_{هـ}$ س^{٢} ء س   ب $\int$ س هـ$^{٢س^{٢}-١}$ ء س

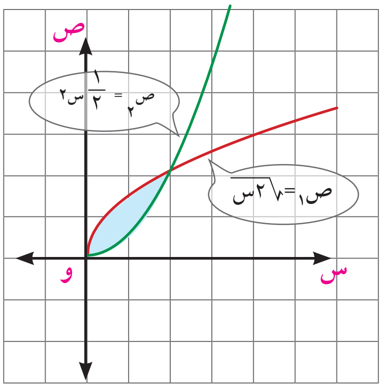
١١ أوجد قيمة كل من ما يأتى:

أ $\int_{-٣}^{٣}$ (٢س^{٥} - ٣ جا $\frac{\pi}{٦}$ س) ء س   ب $\int_{-٢}^{٢}$ س^{٢} (٣ - ٢ |س|) ء س

١٢ إذا كان $\int_{٢}^{٥}$ د(س) ء س = ٨ ، $\int_{٥}^{٢}$ ر(س) ء س = ٣   احسب قيمة $\int_{٢}^{٥}$ (د(س) + ٢ر(س) - ٥) ء س

١٣ أوجد بالوحدات المربعة مساحة المنطقة المحددة بمنحنى د(س) = (س - ٢)^{٣} ومحور السينات فى الفترة [٢، ٤]

١٤ يوضح الشكل المقابل المنطقة المحددة بالمنحنيين ص$_{١}$ = $\sqrt{٢س}$ ، ص$_{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} أوجد:



أ مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص$_{١}$، ص$_{٢}$

ب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين ص، ص$_{٢}$ دورة كاملة حول محور السينات.

إذا لم تستطع الإجابة على أحد هذه الأسئلة يمكنك الاستعانة إلى الجدول الآتى:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤
ارجع إلى الدرس	٢	١	٣	٤	٣	٥	١	مهارات	٢	١	٣	٣	٤	٥

اختبارات عامة

الاختبار الأول

أولاً: أجب عن السؤال الآتى:

(١) إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

١- أى الدوال التالية تحقق العلاقة $\frac{ى^{٣} ص}{ى س^{٣}}$ = ص

(أ) ص = $\frac{١}{١٢}$ (س + ١)^{٤} (ب) ص = حا س

(ج) ص = هـ^{س} (د) ص = $\frac{س}{س - ١}$

٢- إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{١}{\pi}$ سم/ث، فإن محيط الدائرة يزداد بمعدل .... سم/ث

(أ) $\frac{٢}{\pi}$ (ب) ٢   (ج) π (د) ٢π

٣- منحنى الدالة د حيث د (س) = س^{٣} - ٣س^{٢} +٢ محدب لأعلى عندما س $\in$

(أ)]- ∞، ٠[(ب)]-∞، ١[(ج)]١، ٣[(د)]١، ∞[

٤- $\int_{\frac{-\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}}$ (حا س + حتا س) ، ى س يساوى

(أ) ٤   (ب) ٢   (ج) صفر   (د) π

٥- إذا كانت د دالة متصلة على ح، $\int_{٣}^{٥}$ ٢ د(س) ى س = ٨ ، $\int_{٣}^{٤}$ ٣ د (س) ى س = ٩ فإن $\int_{٤}^{٥}$ ٥ د(س) ى س يساوى

(أ) صفر   (ب) ١   (ج) ٣   (د) ٥

٦- مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$ ومحور السينات مقدرة بالوحدات المربعة تساوى

(أ) ١٦π (ب) ١٢π (ج) ٨π (د) ٤π

ثانيًا: أجب عن ثلاثة أسئلة فقط ممايأتى :

(٢) (أ) أوجد: $\int$ حا س حتا^{٣} س ى س

(ب) إذا كان هـ$^{س ص}$ - س^{٢} + ص^{٣} = ٠ ، أوجد $\frac{ى ص}{ى س}$ عند س = ٠

(٣) (أ) أوجد معادلة المماس للمنحنى س^{٢} -٣ س ص - ص^{٢} + ٣ = ٠ عند النقطة (-١، ٤)

(ب) مثلث قائم الزاوية، فى لحظة ما كان طولا ضلعى القائمة ٦ سم، ٣٠ سم، فإذا كان طول الضلع الأول يتزايد بمعدل $\frac{١}{٣}$ سم/د، وطول الضلع الثانى يتناقص بمعدل ١ سم/د أوجد:

١ - معدل التزايد فى مساحة المثلث بعد ٣ دقائق   ٢ - الزمن الذى بعده يتوقف تزايد مساحة المثلث

(٤) (أ) حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د حيث د (س) = س + ٢ حا س، ٠ < س < ٢π

(ب) رسم مستطيل بحيث تقع رأسان متجاوران منه على المنحنى ص = س^{٢} - ١٢والرأسان الآخران على المنحنى ص = ١٢ - س^{٢} إحسب أكبر مساحة لهذا المستطيل.

٥ أ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = $\frac{٤}{س}$ ، ص = (س - ٣)^{٢} دورة كاملة حول محور السينات

ب ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة د الذى يحقق الخواص الآتية:

د (١) = د (٥) = ٠ ، د (٢) = -٣   دً (س) < ٠ لكل س ≠ ٢

دَ (س) < ٠ لكل س < ٢ ،   دَ (س) > ٠ لكل س > ٢

الاختبار الثانى

أولاً: أجب عن السؤال الآتى:

١ إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١- معادلة المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = هـ$^{٢س+١}$ عند النقطة ($\frac{-١}{٢}$ ، ١) هى:

أ ٢ ص = س + ١   ب ص = ٢ س + ٢   جـ ص = ٢ س - ٣   د ٢ ص = ٣ س + ١

٢- إذا كان ص = ٤ ن^{٣} + ٤ ، ع = ٣ ن^{٢} - ٢ فإن معدل تغير ع بالنسبة إلى ص يساوى:

أ ٢ ن   ب ٢   جـ $\frac{١}{٢ن}$ د ٤

٣- أكبر قيمة للمقدار ٨ س - س^{٢} حيث س ∈ ع هى

أ ٨   ب ١٦   جـ ٣٢   د ٦٤

٤- إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه يساوى $\frac{١}{س - ٢}$ وكان المنحنى يمر بالنقطة (٣، ٠) فإن د (هـ^{٢} +٢) تساوى

أ ٢   ب ٣   جـ لو$_{هـ}$ ٢   د لو$_{هـ}$ ٣

٥- إذا كانت د دالة متصلة على ع ، $\int_{١}^{٢}$ د (س) ٤ س = ٩ ، $\int_{٦}^{٢}$ د(س) ٤ س = -٧ فإن $\int_{١}^{٦}$ د(س) ٤ س تساوى:

أ ٢   ب ٨   جـ ١٦   د -٦٣

٦- حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدده بالمنحنى ص = $\sqrt{س + ١}$ والمستقيمات ص = ٠ ، س = -١ ، س = ١ يساوى

أ π ب $\frac{٣\pi}{٢}$ جـ ٢ π د $\frac{٥\pi}{٢}$

ثانيًا: أجب عن ثلاثة أسئلة فقط ممايأتى:

٢ أوجد

أ $\int$ س (٢ س - ١)^{٣} ٤ س ، $\int$ س هـ$^{-٢س}$ ٤ س

ب أوجد معدل تغير $\sqrt{١٦ + س^{٢}}$ بالنسبة إلى $\frac{س}{س - ٢}$ عند س = -٣

٣ أ إذا كان س حتا ص + ص حتا س = ١ فأوجد $\frac{ى ص}{ى س}$

ب أوجد القيم القصوى المطلقه للدالة د فى الفترة [-١ ، ١] حيث د (س) = ٢ س^{٣} + ٦ س^{٢} + ٥

٤ أ إذا كانت د (س) = $\begin{cases} ٢س + س^{٢} & \text{عندما } س < ٠ \\ ٢س - س^{٢} & \text{عندما } س \geqslant ٠ \end{cases}$ أوجد:

١- القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د ٢- $\int_{-١}^{٣}$ د(س) ى س

ب يتزايد حجم مكعب بانتظام بحيث يظل محتفظًا بشكله بمعدل ٢٧ سم^{٣}/د، أوجد معدل الزيادة فى مساحة أوجهه عند اللحظةالتى يكون فيها طول حرفه ٣ سم.

٥ أ أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = س^{٢} ، ص = ٦س - س^{٢} بالوحدات المربعة

ب اذا كان للدالة د حيث د(س) = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س نقطة إنقلاب عند (٢، ٢) فأوجد قيمتى الثابتين أ ، ب ثم إرسم الشكل العام لمنحنى الدالة.

الاختبار الثالث

أولاً: أجب عن السؤال الآتى:

١ إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

١- ميل المماس لمنحنى الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ عند س = ٣ يساوى

أ $\frac{-٤}{٣}$ ب $\frac{-٣}{٤}$ ج $\frac{٥}{١٢}$ د $\frac{٤}{٣}$

٢- إذا كان د (س) = $\frac{س}{س - ٢}$ ، فإن د‴ (٣) يساوى

أ - ٣٦ ب - ١٢ ج ٦ د ٤

٣- إذا كانت $\frac{ى ص}{ى س}$ = قتا^{٢} س ، ص = ٢ عند س = $\frac{\pi}{٤}$ ، فإن ص تساوى

أ - (٢ + ظتا س) ب - (٣ + ظتا س) ج ٢- ظتا س د ٣- ظتا س

٤- إذا كان $\int_{٢}^{٤}$ د (س) ى س = ٧ ، $\int_{٤}^{٢}$ ر (س) ى س = ٢ ، فإن $\int_{٢}^{٤}$ [٢ د(س) - ٣ ر (س) - ٥] ى س يساوى:

أ -١٨ ب -٨ ج ١٠ د ١٤

٥- مساحة المنطقة المحددة بالمستقيمات ص = ٢س -٣، ص = س + ١، س = ٢ تساوى

أ ٢ ب ٣ ج $\frac{٩}{٢}$ د ٦

٦- حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = ظا θ ، و ص = قا θ والمستقيمين س = $\frac{\pi}{٦}$ ، س = $\frac{\pi}{٣}$ دورة كاملة حول محورالسينات مقدرا بالوحدات المكعبة يساوى :

أ $\frac{\pi}{٦}$ ب $\frac{\pi}{٣}$ ج $\frac{٢\pi}{٥}$ د ٢ π

ثانيًا : أجب عن ثلاثة اسئلة فقط ممايأتى :

② أ) أوجد مشتقة ص بالنسبة إلى س حيث: $ص = س^{٢} لو_{هـ} س$

ب) إذا كانت $د(س) = \sqrt[٣]{(س-٤)^{٢}}$ فأوجد فترات التحدب إلى أعلى و إلى أسفل ونقط الانقلاب (إن وجدت) لمنحنى الدالة د

③ **أوجد**

أ) ١- $\int س\,(س-٥)^{٣}\,ى\,س$ ٢- $\int ٤\,س\,هـ^{٢س}\,ى\,س$

ب) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د حيث $د(س) = س^{٤} - ٤\,س^{٣}$ على الفترة $[٠، ٤]$

④ أ) إذا كان حجم الجسم الدورانى الناشئ عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = س^{٣}$ والمستقيمين $س = ٠$، $ص = ١$ دورة كاملة حول محور السينات يعادل حجم سلك اسطوانى الشكل طوله ٤٢ وحدة فما طول نصف قطر السلك .

ب) يتناقص الضلعان المتساويان فى مثلث متساوى الساقين ذو قاعدة ثابتة طولها ل سم بمعدل ٣ سم/د، ما هو معدل تناقص المساحة عندما يصبح المثلث مثلثًا متساوى الأضلاع

⑤ أ) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $س - ص = ٠$، $ص = ٤\,س - س^{٢}$

ب) ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة د الذى له الخواص التالية:

١- $د(٠) = ٣$ ٢- $د'(٢) = د'(-٢) = ٠$

٣- $د'(س) > ٠$ عندما $-٢ < س < ٢$

٤- $د''(س) < ٠$ عندما $س > ٠$، $د''(س) > ٠$ عندما $س < ٠$.

الاختبار الرابع

أولاً: أجب عن السؤال الآتى:

① إختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه

١- اذا كان $ص = \frac{٣\,س - ٥}{س - ٢}$ فإن عند $س = ١$، $\frac{ى^{٣}ص}{ى\,س^{٣}}$ يساوى:

أ) ١٢- ب) ٦- جـ) ٦ د) ١٢

٢- $\int قا^{٣}س\,طا\,س\,ى\,س$ يساوى:

أ) $\frac{١}{٤}\,قا^{٤}س + ث$ ب) $\frac{١}{٣}\,قا^{٣}س + ث$

جـ) $\frac{١}{٢}\,طا^{٢}س + ث$ د) $-\frac{١}{٢}\,طا^{٢}س + ث$

٣- العمودى للدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = ١٢$ عند أى نقطة عليها يمر بالنقطة

أ) $(٢، ٣)$ ب) $(١، ١)$ جـ) $(٠، ٠)$ د) $(-٢، -٢)$

٤- منحنى الدالة د حيث د (س) = (س - ٢) هـ^{س} يكون محدبًا لأسفل على الفترة:

(أ)]-∞ ، ∞[(ب)]-١ ، ٢[(ج)]٠ ، ٢[(د)]- ، ∞[

٥- $\int_{-١}^{٣}$ ٣س |س - ٤| ء س يساوي

(أ) -٢٧ (ب) -٢٠ (ج) ٢٠ (د) ٢٧

٦- عند دوران المنطقة المحددة بالمنحنى س = $\frac{١}{\sqrt{ص}}$ ، ١ ⩽ ص ⩽ ٤ ومحور الصادات، دورة كاملة حول محور الصادات فإن حجم الجسم الناشئ مقدرًا بالوحدات المكعبة يساوى:

(أ) $\frac{٢}{٣}\pi$ (ب) $٣\sqrt{٢}\,\pi$ (ج) ٢ π لو$_{هـ}$ ٢ (د) $\frac{٢}{٣}\pi$ لو ٣

ثانيًا : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط ممايأتى:

(٢) (أ) أوجد: $\int$ (٣س^{٢} - ٤ هـ^{٢س}) ء س، $\int \frac{س - ١}{\sqrt{س + ٣}}$ ء س

(ب) إذا كان حا ص + حتا ٢س = ٠ فأثبت أن: $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ - $(\frac{ءص}{ءس})^{٢}$ ظا ص = ٤ حتا ٢س قا ص

(٣) (أ) اذا كان $\int_{١}^{٤}$ د (س) ء س = ٧، $\int_{٤}^{١}$ ر(س) ء س = ٣ إحسب قيمة

$\int_{١}^{٤}$ [د (س) + ٢ ر(س) - ٤] ء س

(ب) اذا كان منحنى الدالة د حيث د (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء له قيمة عظمى محلية عند (٢، ٤) وله نقطة إنقلاب عند (١، ٢) أوجد معادلة المنحنى

(٤) (أ) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى $\sqrt{س}$ + $\sqrt{ص}$ = ١ والمستقيمين س = ٠ ، ص = ٠

(ب) ارسم منحنى الدالة المتصلة د الذى يحقق الخواص التالية

د (٤) = ٢ د (٣) = ٤، د (٢) = ٠

د َ (س) > ٠ عندما س > ٤ أو س < ٢،

د ً (س) > ٠ عندما س > ٣ ، د ً(س) < ٠ عندما س < ٣

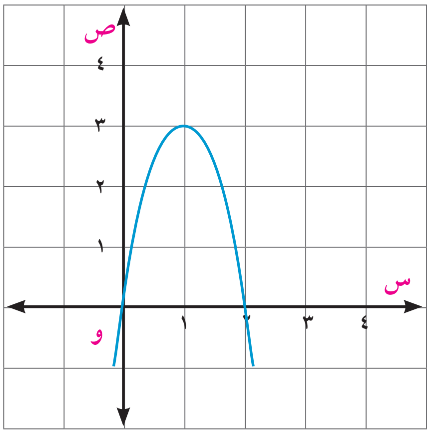
(٥) (أ) أثبت أن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = $\frac{٤}{س}$ ، ص = ٥ - س دورة واحدة حول محور السينات يساوى ٩π من الوحدات المكعبة

(ب) اذا كانت ح مساحة الجزء المحصور بين دائرتين متحدى المركز طولا نصفا قطريهما نق$_{١}$، نق$_{٢}$ حيث نق$_{٢}$ > نق$_{١}$ ، أوجد معدل تغير ح بالنسبة للزمن فى اللحظة التى يكون فيها نق$_{٢}$ = ١٠ سم ، نق$_{١}$ = ٦سم ، إذا علم أن عند هذه اللحظة نق$_{١}$ يتزايد بمعدل ٠,٣سم/ث ، نق$_{٢}$ يتناقص بمعدل ٠,٢ سم/ث.

الاختبار الخامس

أولاً: أجب عن السؤال الآتى:

(١) يوضح الشكل المقابل منحنى د/(س) للدالة د حيث د (س) = أ س^٣ + ب س^٢ ، أ ، ب ثابتان



أكمل:

أ) الدالة د متناقصة لكل س ∈ ....

ب) لمنحنى د نقط حرجة عند س ∈ ....

جـ) منحنى د محدب لأعلى على الفترة ....

د) توجد قيمة صغرى محلية للدالة د عند س = ...

هـ) د (١) = ...

و) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د، والمستقيمين س = ٢ ،ص = ٠ بالوحدات المربعة يساوى: ....

ثانيًا: أجب عن ثلاثة أسئلة فقط ممايأتى:

(٢) أ) أوجد:

١ - $\int$ قتا^٢ $\frac{س + ٥}{٢}$ ء س ٢ - $\int \frac{٥س}{٣س^٢ - ١}$ ء س

ب) للدالة د حيث د(س) = س^٣ - ٦ س^٢ + ٩ س -١

١ - عين فترات التزايد والتناقص للدالة د ٢ - أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د فى الفترة [٠ ، ٢]

(٣) أ) اذا كان د (س) = ٤ + ظتا س - قا^٢ س أوجد معادلة العمودى لمنحنى الدالة د عند نقطة تقع على المنحنى وإحداثيها السينى يساوى $\frac{\pi}{٤}$

ب) خزان فارغ سعته ١٠ أمتار مكعبه يصب فيه الماء تدريجيًا بمعدل (٢ ن + ٣)متر مكعب/ دقيقة حيث ن الزمن بالدقائق، أوجد الزمن اللازم لامتلاء الخزان

(٤) أ) أوجد: نهـا$_{س \leftarrow \infty}$ $\left(\frac{٢س^٢ - ١}{٢س^٢ + ١}\right)^{س^٢}$

ب) يراد تصمم ملصق مستطيل الشكل يحوى ٨٠٠ سم٢ من المادة المطبوعة بحيث يكون عرض كل من الهامشين العلوى والسفلى ١٠ سم، وكل من الهامشين الجانبيين ٥ سم، ما بعدا الملصق اللذان يجعلان مساحته أصغر ما يمكن

(٥) أ) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = ٤ - س^٢ والجزأين الموجبين من محورى الاحداثيات دوره كاملة حول محور السينات.

ب) اذا كان د (س) = س^٣ + أ س^٢ + ب س + ٤ حيث أ ، ب ثابتان

أوجد قيمتى أ ، ب إذا كان للدالة د قيمة صغرى محلية عند س = ٢ ونقطة إنقلاب عند س = ١ ثم إرسم شكلًا عامًا لمنحنى الدالة د

الاختبار السادس

أولاً: أجب عن السؤال الآتى:

(١) فى كل من العبارات التالية إختر الحرف (أ) إذا كانت العبارة صحيحة والحرف ب إذا كانت العبارة خطأ.

١ - القيمة العظمى المحلية للدالة ا كبر من القيمة الصغرى المحلية لها (أ) (ب)

٢ - معدل تغير $\sqrt{\text{ن}^2+3}$ بالنسبة إلى $\frac{\text{ن}}{\text{ن}+1}$ هو: $\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)^2}{\sqrt{\text{ن}^2+3}}$ (أ) (ب)

٣ - إذا كان $\sqrt{\text{ص}} - \sqrt{\text{س}} = 2$ فإن: $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^2} = \frac{-1}{\text{س}\sqrt{\text{س}}}$ (أ) (ب)

٤ - $\int \frac{\text{س}-4}{(\text{س}-2)^6}\,\text{ء}\text{س} = \frac{7(\text{س}-4)^2}{2(\text{س}-2)^7} + \text{ث}$ (أ) (ب)

٥ - إذا كانت ص = س $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س - س فإن: $\frac{\text{ء}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ (أ) (ب)

٦ - إذا كانت (أ، د(أ)) نقطة إنقلاب لمنحنى الدالة المتصلة د فإن: د″(أ) = صفر (أ) (ب)

ثانيًا: أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى:

(٢) أوجد :

أ) $\int \frac{7\text{س}^3}{2-5\text{س}^4}\,\text{ء}\text{س}$ ، $\int (3\text{هـ}^{-5\text{س}} + \frac{\pi}{\text{س}})\,\text{ء}\text{س}$

ب) إذا كانت ص = أ $\text{هـ}^{\text{س}^2+1}$ أثبت أن : $\frac{\text{ء}^3\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^3} = 4\,\text{س}\,\text{ص}\,(3 + 2\text{س}^2)$

(٣) أ) أوجد: $\int$ ظتا س قتا^3 س ء س

ب) إذا كانت ف بعد النقطة (١، ٠) عن النقطة (س ، ص) الواقعة على المنحنى ص = $\sqrt{\text{س}}$ فأوجد إحداثيى النقطة (س ، ص) التى تكون عندها ف أصغر مايمكن.

(٤) أ) عين القيم القصوى المطلقة للدالة د حيث د(س) = |س| (س-٤) فى الفترة [-١، ٣]

ب) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = د(س) عند أى نقطة عليه يساوى ٦س^2 + ب س وكان د(٠) = ٥ ، د(٢) = -٣ ، أوجد قيمة الثابت ب ثم ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة د.

(٥) أ) أوجد معدل تغير $\text{لو}_{\text{هـ}}$ (٩ + س^3) بالنسبة إلى س^2 + ٣ عند س = ١

ب) إذا كانت أ (٠، ٣) ، ب (١ ، ٤) ، جـ (٢، ٠) ، أوجد باستخدام التكامل :

أولا: مساحة سطح المثلث أ ب جـ.

ثانيًا: حجم الجسم الناشئ من دوران المثلث أ و جـ دورة كاملة حول محور الصادات.

الاختبار السابع

أولًا: أجب عن السؤال الآتى :

(١) فى كل من العبارات التالية إختر الحرف (أ) إذا كانت العبارة صحيحة والحرف ب إذا كانت العبارة خطأ.

١ - إذا كانت ص^{٢} = ٣س^{٢} - ٧ فإن: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص}}{\text{٣ س}}$ (أ) (ب)

٢ - للدالة د : د(س) = س^{٣} - ٣س + ١ نقطة إنقلاب هى : (٠ ، ١) (أ) (ب)

٣ - $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ [ظتا (جتا ٣س)] = ٣ جا ٣ س قتا^{٢} (جتا ٣ س) (أ) (ب)

٤ - $\int$ (١ - جتا س)^{٤} جا س ء س = - $\frac{١}{٥}$ (١ + جتا س)^{٥} + ث (أ) (ب)

٥- نهـــا$_{\text{س} \leftarrow \infty}$ (١ + $\frac{٥}{\text{س}}$)$^{\text{س}}$ = هـ^{٥} (أ) (ب)

٦- $\int$ ($\frac{\text{٢هـ}}{\text{س}}$ + $\frac{\text{س}}{\text{هـ}}$) ء س = ٢ هـ لو$_{\text{هـ}}$ |س| - $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{هـ}}$ + ث (أ) (ب)

ثانيًا: أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى:

(٢) أوجد :

(أ) $\int$ س جا س ء س ، $\int_{-١}^{١}$ $\sqrt{\text{س}^{٤} + \text{س}^{٢}}$ ء س

(ب) أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = لو$_{\text{هـ}}$ (٢ - $\sqrt{٢}$ جتاس) عند النقطة التى تقع عليه و إحداثيها السينى يساوى $\frac{\pi}{٤}$.

(٣) (أ) عين فترات التحدب لأعلى وفترات التحدب لأسفل ونقط الانقلاب (إن وجدت) لمنحنى الدالة د حيث د(س) = (س - ١)^{٤} + ٣

(ب) متوازى مستطيلات من المعدن قاعدته علي شكل مربع ، فإذا تزايد طول ضلع القاعدة بمعدل ٠,٤/ث وتناقص الارتفاع بمعدل ٠,٥ سم /ث ، أوجد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة ٦سم والأرتفاع ٥سم.

(٤) (أ) إذا كانت د(س) = $\int_{٠}^{٣}$ س $\sqrt{\text{س} + ١}$ ء س

(ب) ملعب على شكل مستطيل ينتهى ضلعان متقابلان منه بنصفى دائرة خارج المستطيل طول قطرها مساويًا لطول هذا الضلع . إذا كان محيط الملعب ٤٠٠ مترًا فأثبت أن مساحة سطح الملعب تكون ا كبر ما يمكن عندما يكون الملعب على شكل دائرة وأوجد طول نصف قطرها .

(٥) (أ) إذا كانت د(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣ أوجد :

أولا: القيم القصوى المطلقة للدالة د فى الفترة [٠ ، ٢]

ثانيًا: مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د والمستقيمات س = ٠ ، س = ٢ ، ص = ٠

(ب) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى س ص = ٢ والمستقيمان س = ١ ، س =٢

الاختبار الثامن

أولًا: أجب عن السؤال الآتى :

١ اكمل مايأتى:

أ) إذا كان $س^٣ ص^٢ = ١$ فإن : $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{ص=١} =$ ....

ب) $\frac{ء}{ءس}\left[٧ هـ^{قاس}\right] =$ ....

جـ) للدالة د : $د(س) = س^٣ - ٣س - ١$ نقطة انقلاب هى : ....

د) إذا كانت د متصلة على الفترة [٢ ، ٧] فإن : $\int_{٢}^{٧} د(س)\, ءس + \int_{٧}^{٤} د(س)\, ءس =$ ....

هـ) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $ص = س^٢$ ، $ص = ٤س$ تساوى .... وحدة مربعة

و) إذا كانت $ص = س^٢ لو_{هـ} \frac{س}{أ}$ ، $أ \neq ٠$ فإن: $\left[\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}\right]_{س=٤} =$ ....

ثانيًا: أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى:

٢ أوجد:

أ) أوجد : $\int \frac{(س+٣)^٣ - ٢٧}{س} ءس$ ، $\int س^٢ هـ^{-س} ءس$

ب) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة د حيث $د(س) = ٢ ظا^٣ س$ عند النقطة التى تقع على منحنى الدالة د وإحداثيها السينى يساوى $\frac{\pi}{٤}$

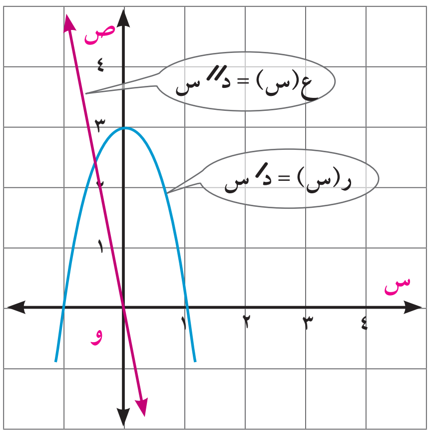
٣ أ) اوجد $\int_{.}^{٥} |س - ٢| ءس$

ب) يوضح الشكل المقابل منحنيا الدالتين ر ، ع حيث :

$ر(س) = د'(س)$ ، $ع(س) = د''(س)$ ،

د دالة كثيرة حدود فى المتغير س.

ارسم الشكل العام لمنحنى د علمًا بأنه يمر بالنقطتين (-١، ٠) ، (١، ٤)



٤ أ) عين القيم القصوى المطلقة للدالة د فى الفترة [٠ ، ٢] حيث $د(س) = ٣ \sqrt{٤ - س^٢}$

ب) قضيب طوله ٥ أمتار مثبت بمفصل فى الأرض عند أحد طرفيه ، فإذا رفع طرفه الآخر رأسيًا إلى أعلى بواسطة ونش بمعدل ١ متر/دقيقة أوجد معدل تناقص طول مسقط القضيب على الأرض عندما يكون ارتفاع هذا الطرف ٣ أمتار.

٥ أ) رسم فى نصف دائرة شبه منحرف قاعدته هى قطر نصف الدائرة ، عين قياس زاوية قاعدة شبه المنحرف بحيث تكون مساحته اكبر مايمكن.

ب إذا كانت م المنطقة المحددة بالمنحنى $س ص = ٤ + س^{٢}$ والمستقيمات $س = ١$ ، $س = ٤$ ، $ص = ٠$ أوجد :

أولًا: مساحة المنطقة م بالوحدات المربعة لأقرب وحدة .

ثانيًا: حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة م دورة كاملة حول محور السينات .

الاختبار التاسع

أولاً: أجب عن السؤال الآتى:

(١) إختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه

١- إذا كان $س = ٢ن^{٢} + ٧$ ، $ص = \sqrt[٣]{ن}$ ، $ن = ١$ فإن: $\frac{ءص}{ءس}$ يساوى :

أ $\frac{٣}{٨}$ ب $\frac{٣}{٤}$ ج ٢ د ٦

٢- منحنى الدالة د محدبًا لأسفل على ع إذا كان د(س) يساوى :

أ $٢ - س^{٢}$ ب $٢ + س^{٣}$ ج $٢ - س^{٤}$ د $٢ + س^{٤}$

٣- إذا كان لمنحنى الدالة د : $د(س) = س^{٣} + ك س^{٢} + ٤$ ، $ك \in ع$ نقطة انقلاب عند $س = ٢$ ، فإن ك تساوى :

أ ٦- ب ٣- ج ٦ د ٩

٤- إذا كانت د دالة متصلة على ع ، $\int_{-١}^{٣} د(س)\, ءس = ٧$ ، $\int_{٥}^{٣} د(س)\, ءس = -١١$ فإن: $\int_{-١}^{٥} د(س)\, ءس$ تساوى:

أ - ٤ ب ١٨ ج ١٨- د ٧٧

٥- $\int_{-١}^{٣} |س - ١|\, ءس$ يساوى:

أ ٦- ب ٠ ج ٤ د ٨

٦- مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = س^{٣}$ والمستقيمين $ص = ٠$ ، $س = ٢$ تساوى :

أ ١ ب ٢ ج ٤ د ٨

ثانيًا: أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى:

(٢) أ أوجد: $\int \frac{٣س}{س^{٢}-١}\, ءس$ ، $\int ٩س^{٢} هـ^{٣س}\, ءس$

ب أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها مماس المنحنى $ص^{٣} = س^{٢}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند $س = ٨$ لأقرب دقيقة .

(٣) أ إذا كان $جا س = س ص$ أثبت أن : $س^{٢} (ص + ص'') + ٢ جتا س = ٢ ص$

ب إذا كان للمنحنى $ص = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} + ٤س + ٥$ مماسان متوازيان أحدهما يمس المنحنى عند النقطة (-١، ٢) ، أوجد معادلة المماس الآخر.

④ أ يرتفع بالون رأسيًا لأعلى بمعدل ثابت قدره ٢٨ متر / دقيقة، فإذا تم رصد البالون من مشاهد على الأرض يبعد ٢٠٠ مترًا عن موقع إطلاق البالون ، أوجد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد له عندما يكون البالون على أرتفاع ٢٠٠ مترًا.

ب إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة (س،ص) على المنحنى هو ٣ (س^{٢} -١) أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية لمنحنى الدالة د ونقط الانقلاب إن وجدت، علمًا بأن المنحنى يمر بالنقطة (-٢، -١) ، ثم ارسم شكلا عامًا لهذا المنحنى.

⑤ المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يقطع منحنى الدالة د فى النقطة جـ (س ، ص) حيث س > ٠، أ (٠، ٢)، ب (٦، ٤) ، د(س) = $\frac{٩}{\text{س}}$، أوجد :

أ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ب إحداثيي النقطة جـ

جـ معادلة العمودى على منحنى د عند النقطة جـ، وأثبت أنه يمر بنقطة الأصل و

د حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالعمودى $\overleftrightarrow{\text{وجـ}}$ ومنحنى الدالة د والمستقيم س = ٦ دورة كاملة حول محور السينات.

الاختبار العاشر

أولًا: أجب عن السؤال الآتى:

① أكمل ماياتى :

أ $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{س}+٣}$ = ...

ب $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (٥ - ٢ ظتا س)^{٣} = ...

جـ إذا كان للدالة د : د(س) =ك س^{٣} + ٩س^{٢} نقطة انقلاب عند س = -١ فإن :ك = ...

د $\int_{-١}^{٣}$ (٤س^{٣} - ٦س^{٢} + ٥) ء س = ...

هـ إذا كانت د دالة متصلة على الفترة [١ ، ٤] فإن $\int_{١}^{٤}$ د(س) ء س + $\int_{٤}^{١}$ د(س) ء س = ...

و مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = س^{٤} + ١، ص = ٢س^{٢} تساوى .... وحدة مربعة

ثانيًا: أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى:

② أ أوجد: $\int$ ظا (٣س + ١) ء س ، $\int$ (١ - س^{٢}) (٣س - س^{٣})^{٥} ء س

ب إذا كانت المعادلتان البارامتريتان للدالة د حيث ص = د(س) هما:

س = ٢ن^{٣} + ٣ ، ص = ن^{٤} أوجد عند ن = ١ كل من :

أولاً : معادلة مماس منحنى الدالة د ثانيًا: $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}}$

٣ **أ** ابحث تحدب منحنى الدالة د حيث د(س) = |س^{٣} -١| موضحًا نقط الانقلاب إن وجدت.

ب إذا كان $\int_{-٢}^{٣}$ د(س) ءس = ٩ ، $\int_{٥}^{٣}$ د(س) ءس = ٤ ، أوجد قيمة

$\int_{-٢}^{٥}$ [٣ د(س) - ٦ س] ءس

٤ **أ** أوجد مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنيين ص + س^{٢} = ٦ ، ص + ٢ س - ٣ = ٠ .

ب إناء على هيئة اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها من الداخل ٩سم وطول نصف القطر الداخلى لقاعدته ٦ سم. وضع داخله ساق معدنية طولها ١٦سم، فإذا كان معدل انزلاق الساق مبتعدة عن حافة الاسطوانة ٢ سم/ث، أوجد معدل انزلاق الساق على قاعدة الاسطوانة عندما تصل إلى نهاية قاعدتها.

٥ **أ** إذا كان معدل تغير ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه (س، ص) هو ٦ (١ - ٢س) وكان للمنحنى نقطة حرجة عند س = ١ وللدالة قيمة صغرى محلية تساوى ٤ .
أولاً: أوجد معادلة العمودى للمنحنى عند س = -١
ثانيًا: ارسم شكلاً عامًا للمنحنى موضحًا القيم العظمى والصغرى ونقط الانقلاب إن وجدت

ب أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحصورة بالمنحنيات : ص = س^{٣} + ١ ، ص = ٠، س = ٠، س = ١ دورة كاملة حول محور السينات.

إجابات بعض تمارين

الوحدة الأولى

حلول تمارين الدرس (١–١)

(١) ‎-١   (٢) ١٨   (٣) $\frac{٣}{٨}$

(٤) ١٠   (٥) ٦   (٦) $\frac{-١٠}{٢٧}$

(٧) ٣س^{٢} - ٢ قا س ظا س

(٨) ٣ قتا (٢ - ٣س) ظتا (٢ - ٣س)

(٩) $\frac{-١}{\text{س}^{٢}}$ قتا^{٢} $(\pi - \frac{١}{\text{س}})$

(١٠) - قتا^{٢}س قا^{٢} (ظتا س)

(١١) ‎-٢ قتا^{٢}س (١+ظتاس)

(١٢) ٢ قتا (π-٢س) ظتا (π-٢س)

(١٣) ‎-٢ جا ٢س + ١٥ قتا^{٢} ٣س

(١٤) ٣ قا^{٢} ٣س + ٢ قتا ٢س ظتا ٢س

(١٥) ٣ جا ٦س + ٢ قا^{٢}س ظا س

(١٦) ٢ قاس قا^{٢} ٢س+ ظا ٢س قا س ظا س

(١٧) $\frac{-٣}{٢\sqrt{\text{س}}}$ ظتا^{٢}$\sqrt{\text{س}}$ قتا^{٢}$\sqrt{\text{س}}$

(١٨) ‎-٤ س قتا^{٢} (١ + س^{٢}) ظتا (١ + س^{٢})

(١٩) ١٢ قا^{٢} (٢س + π) ظا (٢س + π)

(٢٠) $-\frac{\text{- قتا س ظتا س}}{٢\sqrt{\text{١ + قتا س}}}$

(٢١) ٢س ظتا ٣س - ٣س^{٢} قتا^{٢} ٣س

(٢٢) $\frac{\text{قتا س}}{\text{قتا س + ظتا س}}$

(٢٣) $-\frac{٣(\text{٢ س + ٣}) \text{ قتا}^{٢} \text{ ٣ س} \times \text{٢ ظتا ٣س}}{(\text{٢ س + ٣})^{٢}}$

(٢٤) $-\frac{\text{٢ قاس ظا س}}{(\text{١ + قاس})^{٢}}$ (٢٥) $\frac{-\pi}{٤}$

(٢٧) أ ‎-٢   ب ٢

تمارين الدرس (١–٢)

(١) جـ   (٢) جـ   (٣) د

(٤) أ   (٥) ب   (٦) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{س}}{\text{٤ص}}$

(٧) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\frac{\text{س}^{٣}}{\text{٣ص}^{٣}} = -\frac{١}{٣}\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{٣}$

(٨) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١$ (٩) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\frac{٣(\text{س}^{٢} + \text{٢ص})}{٢\ (\text{٣س - ٢})}$

(١٠) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص-٢س}}{\text{٢ص-س}} = \frac{\text{٢س-ص}}{\text{س-٢ص}}$

(١١) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{-ص}}{\text{س+جتاص}}$

(١٢) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص جا س - جا ص}}{\text{س جتا ص + جتا س}}$

(١٣) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص قتا}^{٢}\text{ س + قتا ص}}{\text{ظتا س + س قتا ص ظتا ص}}$

(١٤) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص}^{٢}\text{ جتا س - ٢ س جا ص}}{\text{س}^{٢}\text{ جتا ص - ٢ص جاس}}$

(١٥) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ظتا ٢س ظتا ٢ص

(١٦) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\frac{١٢٧}{٨}$ (١٧) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{ظا}\frac{\pi}{٣} = -\sqrt{٣}$

(١٨) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢}$ (١٩) (‎-٣)   (٢٠) $(-\frac{٢}{٣})$

(٢١) أ يكون للمنحنى مماسًا رأسيًا عندما ن = $\frac{٢}{٣}$ أو عندما ن = ١

ب يكون للمنحنى مماسًا أفقيًا عندما ن = $-\frac{١}{٤}$

تمارين الدرس (١–٣)

(١) أ = ١ ، ب = ١١ ، جـ = ١٩ ، ء = ‎-٢٣

ص = ٦٧ ، ص$'$ = ٤٤

(٢) ص$'''$ = ٦٠س^{٢}-٢٤   (٣) ص$'''$ = $\frac{١٢}{(\text{س+١})^{٤}}$

(٤) ص$'''$ = ‎-٨جتا (٢س-٧)

(٥) ص$'''$ = ‎-٢٧ جا (π-٣س)

(٦) ص$'''$ = ‎-٤جتا٢س   (٧) ص$'''$ = $\frac{٣}{\sqrt{(\text{٢س - ٥})^{٥}}}$

(١٤) $\frac{٢}{٢٧}$ (١٥) $\frac{١}{٤٨}$ (١٦) $-\frac{١}{٩}$

تمارين الدرس (١ – ٤)

(١) أ معادلة المماس: س + ص - ١٠ = ٠

، معادلة العمودى : س - ص + ٤ = ٠

ب ١٢ س - ص - ٨٦ = ٠

س + ١٢ ص + ١٧ = ٠

جـ ١٢ س - ص - ٣٨ = ٠

س + ١٢ ص + ٢١ = ٠

(٢) أ ص - ٢ = ٤ (س - $\frac{\pi}{٤}$)

ص - ٢ = $-\frac{١}{٤}$ (س - $\frac{\pi}{٤}$)

ب) ص + ١ = $-٣\sqrt{٣}$ (س - $\frac{\pi}{٣}$)

ص + ١ = $\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$ (س - $\frac{\pi}{٣}$)

٣) أ) ٢ س - ٣ص - ٢٦ = ٠ ‏ ٣س + ٢ ص = ٠

ب) س + ص + ٢ = ٠ ‏ س - ص = ٠

جـ) س - ٢ ص + ٥ = ٠ ‏ ٢ س + ص = ٠

د) ص = ٠ ، س = $\frac{\pi}{٢}$

٤) أ) ٢س - ٣ص - ٤ = ٠ ‏ ٣س + ٢ ص - ١٩ = ٠

ب) ٢ س - ص - $\sqrt{٣}$ = ٠ ‏ $\sqrt{٣}$ (س + ٢ ص) = ٤

٥) ك = ٤ ‏ ص + ٢ = ٠

٦) ٨,٥ وحدة مربعة

٧) عند النقطة أ (٠، ١) : س - ص + ١ = ٠

، س + ص - ١ = ٠

عند النقطة ب (٠، -١) : س + ص + ١ = ٠

، س - ص - ١ = ٠

تمارين (١ – ٥)

١) د ‏ ٢) ب ‏ ٣) أ ‏ ٤) ب

٥) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = -٠,٨ وحدة/ث

٦) $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = ١٦٠π سم^{٢}/ث

٧) $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = $-٣\sqrt{٣}$ سم^{٢}/ ث

٨) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٥٠ ث جم/سم^{٢}/ث

٩) ∴ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ = $\frac{-١}{٢٠\pi}$ سم/ ث ∴ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = -٤ سم^{٢}/ ث

١٠) -٣سم/ د ‏ ∴ $\frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}}$ = -٠,٠١$^{\circ}$/ د

١١) ٤٨ متر/ د ‏ ١٣) -٦٠ سم^{٢} / ساعة

إجابات التمارين العامة

١) د ‏ ٢) جـ ‏ ٣) جـ ‏ ٤) ب

٥) ب

٦) أ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١ - ٢ قتا^{٢} ٢س

ب) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}$ + ٥قا ٥ س ظا ٥س

جـ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ + ١٠ $\pi^{٢}$ س جا (π س)^{٢}

د) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = -٢ π جا٢ (π س + ١)

هـ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = صفر

و) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ قا ٢س (٢قا^{٢} ٢س - ١)

٧) $\frac{\text{ءس}}{\text{ء}\theta}$ = $-٢\sqrt{٣}$ ع

٨) أ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{س}}{\text{٣ص}}$ ‏ ب) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{-٥س}}{\text{١٨ص}^{٢}}$

جـ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{س - ص}}{\text{س - ٢ص}}$ ‏ د) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{٣ - س}}{\text{ص + ٢}}$

هـ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = - $\frac{\text{ص + جتا س}}{\text{س}}$

و) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ظتا س ظتا ص

٩) أ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{١}{٥}$ (٢س + ١) (س + ٢)^{٢}

ب) ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{-٦}{٢٥}$

١١) أ) س $\sqrt{٣}$ - ٩ص + ٢٤ = ٠

$٣\sqrt{٣}$ س + ص - ١٢ = ٠

ب) ٢س - ص = ٠

٤س + ٨ص - ٥π = ٠

١٢) أ) ٣س + ص - ١٠ = ٠ ‏ س - ٣ص = ٠

ب) س + ٢ص + ١ = ٠ ‏ ٢س - ص - ٣ = ٠

١٣) ١ وحدة مربعة

١٦) ٩٩سم/ث ‏ ١٨) -١ وحدة/ ث

١٩) -٨ سم^{٢}/ ث ‏ $\frac{٨}{٣}$ ث ‏ $\frac{٧٨٤}{٣}$ سم^{٢}

٢٠) $\frac{٣}{٤}$ ك وحدة/ ث ‏ ٢١) ١٠سم

٢٢) - $\frac{٥}{٣}$ متر/ د ‏ ∴ $\frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}}$ = - $\frac{٥}{٣}$$^{\circ}$ / د

٢٣) -١٢ سم^{٣}/ث ‏ ٢٤) - $\frac{١}{٧٢\pi}$ م / د

٢٥) ١٤,٠$^{\circ}$ / د ‏ ٢٦) -١$^{\circ}$ / ث

٢٧) $\frac{٣}{١٤}$ وحدة مربعة / ث

حل الاختبار التراكمى

(١) جـ (٢) أ (٣) جـ (٤) د

(٥) $\frac{٦ن^{٢} - ٦ن + ٢}{(١ - ٢ن)^{٣}}$

(٦) س - ٣ص + ٤٨ = ٠ (٨) ٢٠

(٩) أ س - ٦ص + ١٨ - $\frac{\pi}{٤}$ = ٠

ب ١٩,٣ سم^{٢}/ث

(١٠) - $\frac{٢٠\sqrt{٣}}{٣}$ سم/ث

الوحدة الثانية

تمارين ٢ - ١

(١) د (٢) جـ (٣) ب (٤) ب

(٥) هـ (٦) هـ (٧) هـ^{س} (٨) هـ^{٤}

(٩) ٢ (١٠) ١ (١١) هـ^{٤} (١٢) -١

(١٣) ٢ لو$_{هـ}$ أ (١٤) هـ^{٣} (١٥) هـ$^{-١}$ (١٦) $\frac{٣}{٢}$

تمارين (٢ - ٢)

(١) ب (٢) د (٣) د (٤) جـ

(٥) ١٥س^{٤} هـ$^{٣س^{٥}}$ (٦) (٢س - ١)هـ$^{س^{٢} - س}$

(٧) -٢(٣$^{س - ١}$)$^{-٢}$ لو$_{هـ}$ ٣ (٨) ٥س هـ$^{\frac{١}{٢}(٥س^{٢} - ٣)}$

(٩) $\frac{٢}{٢س - ٧}$ (١٠) $\frac{٢(س + ١)}{س(س + ٢)}$

(١١) $\frac{س + ١٤}{س(س + ٧)}$ (١٢) س [١ + ٢ لو$_{هـ}$ س]

(١٣) $\frac{٨}{٤س + ٩}$ لو$_{٣}$ هـ

(١٤) هـ^{٣س} [$\frac{٣}{لو س}$ - $\frac{لو هـ}{س (لو س)^{٢}}$]

(١٥) هـ^{س} قا هـ^{س} طا هـ^{س}

(١٦) ٦ هـ^{٣س} - $\frac{٥}{س}$ - لو$_{٢}$ هـ (١٧) - ١,٥٧

(١٨) $\frac{٥}{٢}$ (١٩) -٢,٦٤

(٢٠) $\frac{ءص}{ءس}$ = - ص (٢١) $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{- ٥٨ ص}{س^{٢}}$

(٢٢) س$^{جا س}$ [$\frac{جا س}{س}$ + جتا س لو$_{هـ}$ س]

(٢٣) هـ^{س} × هـ$^{هـ^{س}}$ (٢٤) هـ س$^{هـ - ١}$ × هـ$^{س هـ}$

(٢٥) س$^{\frac{١}{س} - ٢}$ (١ - لو$_{هـ}$ س)

(٢٦) $\frac{٣ ن^{٢}}{٢ هـ^{ن^{٣}}}$ $\frac{٣}{٢}$ × $\frac{ن (١ - ن)}{هـ^{ن^{٤}}}$

(٢٧) $\frac{١}{٣}$ × ن^{٢} $\frac{١}{٩}$ × ن^{٢}

(٢٨) $\frac{١}{٢}$ (٣١) س = $\frac{٢}{٣}$

(٣٢) هـ^{س} + ٣ ص - هـ - $\frac{٩}{هـ}$ = ٠ (٣٣) $\frac{١٢٠}{هـ^{٣}}$

(٣٤) ١٢,٨ جم/ يوم ٨,٧ جم/ يوم

٨ جم / يوم

تمارين ٢-٣

(١) د (٢) جـ (٣) أ (٤) جـ

(٥) $\frac{١}{٤}$ هـ^{٤س} + ث (٦) س^{٣} + ٢هـ^{س} + ث

(٧) ٤ لو$_{هـ}$ |س| + هـ$^{-س}$ + ث

(٨) -$\frac{١}{٣}$ هـ$^{-٣س + ١}$ + ث (٩) $\frac{٧}{٩}$ هـ$^{٣س - ٤}$ + ث

(١٠) $\frac{٢}{٣}$(هـ^{س} + ١)^{٣} + ث

(١١) $\frac{١}{٢}$ هـ^{٢س} + ٢ هـ^{س} - ٤ هـ$^{-س}$ + ث

(١٢) $\frac{١}{٣}$ هـ$^{س^{٣} + ١}$ + ث (١٣) ٢ لو$_{هـ}$ (هـ^{س} + ١) + ث

(١٤) $\frac{١}{٤}$ لو$_{هـ}$ | ٤ س - ١ | + ث (١٥) $\frac{١}{٢}$ لو$_{هـ}$ (س^{٢} + ١) + ث

(١٦) لو$_{هـ}$ | ظا س | + ث

(١٧) لو$_{هـ}$ | جا س - جتا س | + ث

(١٨) لو$_{هـ}$ | ١ + جا س | + ث (١٩) لو$_{هـ}$ | قا س - ١ | + ث

(٢٠) لو$_{هـ}$ | لو$_{هـ}$ س | + ث

(٢١) ٢ لو$_{هـ}$ | س + ١ | + $\frac{٢}{س + ١}$ + ث

(٢٢) $\frac{١}{٣}$ (لو$_{هـ}$ س)^{٣} + ث (٢٣) لو$_{هـ}$ |س^{٣} - ١| + ث

(٢٤) لو$_{هـ}$ |س^{٣} - ٥س + ١ | + ث

(٢٥) $٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

(٢٦) $٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,٣\text{س}\,| + \text{ث}$ (٢٧) $\frac{١}{٣}(١+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٣} + \text{ث}$

(٢٨) د(٣) ≃ ٤,١١

إجابات التمارين العامة

(١) د (٢) أ (٣) جـ (٤) د

(٥) م.ح = {١٠٣} (٦) م.ح = {٢٥}

(٧) م.ح = {٠,٣٩٩} (٨) م.ح = {١,٩١}

(٩) م.ح = {٢,١٩٧} (١٠) م.ح = {١,٦٥٤}

(١١) $\text{هـ}^{٦}$ (١٢) $\text{هـ}^{-١}$ (١٣) $\text{هـ}^{-٢}$ (١٤) $٧\text{هـ}^{\text{س}}$

(١٥) $٦\text{س}\,\text{هـ}^{٣\text{س}^{٢}+١}$ (١٦) $٢\text{س}\,\text{هـ}^{-٣}$

(١٧) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+٣}$ (١٨) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٢}$

(١٩) $\text{هـ}^{\text{س}}\left[\frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+١} + \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}+١)\right]$

(٢٠) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}}+١)^{٢}}$

(٢١) $= ٣\text{س}^{٢}$ (٢٢) صفر

(٢٣) $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \frac{٣}{٤\text{هـ}^{\text{ن}}}$ (٢٤) $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \frac{-٤}{٣\text{ن}^{٦}}$

(٢٥) $\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}} = \frac{٢}{\text{س}^{٣}}$ (٢٦) $\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}} = ٦ + ٨\,\text{هـ}^{٢\text{س}}$

(٢٧) $\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}} = -\frac{١}{\text{س}^{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}١٠}$

(٣٠) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢^{\text{س}}\left[١ + (\text{س}+١)\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢\right]$

(٣١) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣^{\text{س}^{٢}+٢}\left[\frac{\text{س}^{٢}+٣}{\text{س}} + ٢\,\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right]$

(٣٢) $-\left[\text{جا س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(١-٣\text{س}) + \frac{٣\text{جتاس}}{١-٣\text{س}}\right](١-٣\text{س})^{\text{جتا س}}$

(٣٣) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{س}}\left(\frac{١}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)\text{س}^{\text{هـ}^{\text{س}}}$

(٣٤) $\text{س} = \frac{١}{\sqrt[٣]{\text{هـ}}}$ (٣٥) $\text{س} = \sqrt{\text{هـ}}$

(٣٦) س = ٣ (٣٧) $\text{س} = \sqrt{٢}$

(٣٨) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{هـ}-١}{\text{هـ}}$ (٣٩) $٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٢}+٣\text{س}| + \text{ث}$

(٤٠) $٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{ث}$

(٤١) $٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| - ٢\,\text{هـ}^{-٢\text{س}} + \text{ث}$

(٤٢) $\text{هـ}^{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}٣ + \text{ث}$

(٤٣) $\frac{١}{٤}\text{س}^{٤} - \frac{٢}{٣}\text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

(٤٤) $\frac{١}{٢}\text{ظتا}^{٢}\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جا س}| + \text{ث}$

(٤٥) ≃ ٧,٤٥٦ وحدة طول

(٤٦) ٣س-ص - ١,٥٢ = ٠   س + ٣ص - ١٥,٤٤ = ٠

(٤٧) $\text{ص} = ٨\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| - ٨\,\text{لو}_{\text{هـ}}٤ + ٢$

(٤٨) س ∈ {١,٦٥ ، -١,٦٥}

اجابات الاختبار التراكمى

(١) جـ (٢) د (٣) ب (٤) جـ

(٥) أ $\text{ص}' = ٦\text{س}^{٢}(\text{س}^{٣}+١)$

ب $\text{ص}' = \frac{٢}{\text{س}} - \frac{١}{٤}\text{هـ}^{\frac{١}{٤}\text{س}}$

جـ $\text{ص} = ٢\left(\text{س} - \frac{١}{\text{س}}\right)$

(٧) أ $\text{س}^{٢} + ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{ث}$

ب $-٢\,\text{هـ}^{-\sqrt{\text{س}}} + \text{ث}$

جـ $\frac{٣}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}| + \text{ث}$

(٨) $\text{د}(\text{س}) = ٧(\text{س}+١-\text{لو}_{\text{هـ}}٢) - ٢\,\text{هـ}^{\text{س}}$

الوحدة الثالثة

تمارين (٣-١)

(١) د متناقصة على]-∞، ٢[د متزايدة على]٢، ∞[

(٢) د متناقصة على]-∞، ٣[د متزايدة على]٣، ∞[

(٣) د متزايدة على]-∞، ٠[د متناقصة على]٠، ٤[

د متزايدة على]٤، ∞[

(٤) د متناقصة على]-∞، -√٣ [
د متزايدة على]-√٣ ، √٣ [
د متناقصة على]√٣ ، ∞ [

(٥) د متناقصة على]-∞، -١]
د متزايدة على [-١ ، ∞[

(٦) د متزايدة على]-∞، ٢]
د متناقصة على [٢ ، ∞[

(٧) د متزايدة على]-∞، ٠]
د متزايدة على [٠ ، ∞[

(٨) د متزايدة على]-∞، -٢]
متزايدة على [-٢ ، ∞[

(٩) د متزايدة على [١، ٢] ، متناقصة على [٢ ، ∞[

(١٠) د متزايدة على [٠، ∞ [

(١١) د متزايدة على]-∞، ٠]
د متناقصة على [٠ ، ∞[

(١٢) د متناقصة على]-∞، ∞ [

(١٣) د(س) متزايدة على الفترة [٠ ، $\frac{\pi}{٤}$]

(١٤) د متناقصة على [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]
، متزايدة على [$\frac{\pi}{٢}$، $\frac{٣}{٢}\pi$]
، متناقصة على [$\frac{٣}{٢}\pi$، ٢π]

تمارين ٣-٢

(١) د(٠) = ٠ قيمة عظمي محلية
د(٢) = -٤ قيمة صغرى محلية

(٢) د(-١) = -٢ قيمة عظمى محلية
د(١) = ٢ قيمة صغرى محلية

(٣) د(٠) =٠ قيمة عظمى محلية
د(١) =-١ قيمة صغرى محلية

(٤) د(-٢) = ٦ عظمى محلية ، د(٠) = ٢ صغرى محلية

(٥) د(-١) = -١ صغرى محلية، د(٠) = ٠ عظمى محلية
د(١) = -١ صغرى محلية

(٦) د($\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$) = $\frac{-١٦}{٣\sqrt{٣}}$ صغرى محلية
د($\frac{٢}{\sqrt{٣}}$) = $\frac{١٦}{٣\sqrt{٣}}$ عظمى محلية

(٧) د(-١) = ٢ عظمى محلية، د(١) = -٢ صغرى محلية

(٨) د(٠) = ٣ عظمى محلية

(٩) د(-٢) = ٠ قيمة صغرى محلية

(١٠) د(٢) = ٣ قيمة صغرى محلية

(١١) د(-١) = -٣ قيمة عظمى محلية
د(٣) = ٥ قيمة صغرى محلية

(١٢) لا توجد قيم عظمى أو صغرى محلية

(١٣) د(٠) = ٤ قيمة عظمى محلية

(١٤) د(٢) = هـ^{٢} قيمة عظمى محلية

(١٥) د(٠) = ٢ قيمة صغرى محلية

(١٦) د(١) = ١ قيمة صغرى محلية

(١٧) د(٢) = ٨ لو$_{هـ}$ -٤≃١,٥٥ قيمة عظمى محلية

(١٨) د(١) = ٠ قيمة صغرى محلية

(١٩) للدالة قيمة عظمى مطلقة =٣،
قيمة صغرى مطلقة = -١

(٢٠) للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢ ،
قيمة صغرى مطلقة = ١

(٢١) للدالة قيمة عظمى مطلقة = √٢ ،
قيمة صغرى مطلقة = -√٢

(٢٢) للدالة قيمة عظمى مطلقة ≃ ٠,٣٧
وقيمة صغرى مطلقة = ٠

(٢٣) أ = ١ ، ب = -٩ ، جـ = ١٥ ، ى = ٠

تمارين ٣-٣

(١) (أ) [-٤، ٥] (ب) {-٢،٢} (جـ)]٠ ، ٥[
(د)]-٤، ٠[(هـ) (٠ ، ٠) (و) ٢ (ز) ٨

(٢) المنحنى محدب لأعلى لكل س∈ع
لا توجد نقط انقلاب

(٣) التحدب : لأعلى على]-∞، ١]
لاسفل على [١ ، ∞[، (١،-١) نقطة إنقلاب

(٤) التحدب: لأعلى على [٢ ، ∞[،
لاسفل على]-∞، ٢] ، (٢، ٤٦) نقطة إنقلاب.

٥ التحدب : لأعلى على]$\frac{٢-}{\sqrt{٣}}$، $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$[

لأسفل على] - ∞، $\frac{٢-}{\sqrt{٣}}$[،]$\frac{٢}{\sqrt{٣}}$، ∞[

نقط الانقلاب: ($\frac{٢-}{\sqrt{٣}}$، $\frac{٦٤}{٩}$) ، ($\frac{٢}{\sqrt{٣}}$، $\frac{٦٤}{٩}$)

٦ التحدب: لأعلى على]-١، ٠ [

لأسفل على] -∞، -١ [،] ١،∞[

نقط الانقلاب: (-١، $\frac{٣}{٢}$) ، (١، $\frac{٣}{٢}$)

٧ التحدب: لأعلى على] -٢، ٢[

لاسفل على] - ∞، -٢[،]٢، ∞[

لا توجد نقط انقلاب

٨ التحدب: لأسفل على] - ∞، ٤[

لأعلى على] ٤، ∞[

لا توجد نقط إنقلاب لعدم وجود مماس للمنحنى عند نقطة (٤،٤)

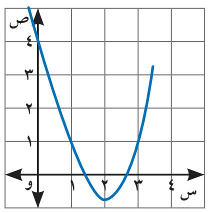
٩ التحدب: لأعلى على] -∞، ٠ [،]٠،∞[

لا توجد نقط إنقلاب

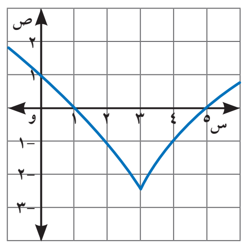
١٠ θ = ظا$^{-١}$ (١) = $\frac{\pi}{٤}$

١٢ أ=٣ ، ب =٤

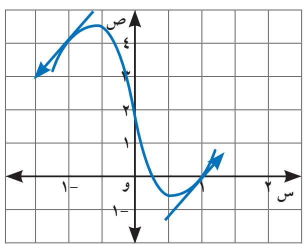
١٣



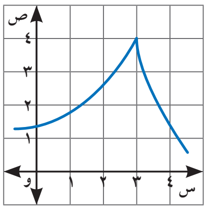
١٤



١٥



١٦



١٧ (٠ ، ٥) مع محور الصادات

(١، ٠) ، (٥ ، ٠) مع محور السينات.

د(٣) = -٤ صغرى محلية

١٨ (٠ ، ٣) مع محور الصادات

($\sqrt{٣}$ ، ٠) ، (-$\sqrt{٣}$ ، ٠) مع محور السينات.

د(٠) = ٣ عظمى محلية

١٩ نقط الأنقلاب: (١،١)

د(٠) = ٣ عظمى محلية د(٢) = -١ صغرى محلية

نقط إضافية : (-١، -١) ، (٣،٣)

٢٠ نقط الأنقلاب: (٠ ، ٢)

د(١) = $\frac{٤}{٣}$ صغرى محلية د(-١) = $\frac{٨}{٣}$ عظمى محلية

نقط إضافية: (٣ ، ٨) ، (-٣ ، -٤)

٢١ نقط الانقلاب: (٠ ، ١)

د(٢) = -١ صغرى محلية د(-٢) = ٣ عظمى محلية

نقط إضافية: (٤ ، ٣) ، (-٤ ، ١)

٢٢ نقط الانقلاب: (٢ ، -٢)

د(١) = -٤ صغرى محلية د(٣) = ٠ عظمى محلية

التقاطع مع المحاور: المنحنى يمر بنقطة الأصل

نقط إضافية: (٤ ، -٤)

٢٣ نقط الانقلاب : (٠ ، ٢)

د(١) = ٤ عظمى محلية د(-١) = ٠ صغرى محلية

نقط التقاطع مع المحاور:

(٢ ، ٠) ، (-١ ، ٠) مع السينات ، (٠ ، ٢) مع الصادات

نقط إضافية: (-٢، ٤)

٢٤ نقط انقلاب: (٠ ، ٢)

د(٢) = ٠ صغرى محلية د(-٢) = ٠ عظمى محلية

التقاطع مع المحاور: (٠ ، ٢) مع الصادات

(-٤، ٠) ، (٢ ، ٠) مع السينات.

٢٥ نقط الانقلاب : (١ ، -٢) فقط

د(٢) = -٤ صغرى محلية   نقط إضافية: (-١ ، ٣)

٢٦ د(٠) = ٤ عظمى محلية و لا توجد نقط انقلاب

نقط إضافية = (٥ ، ٥)

تمارين ٣-٤

١ ١٥ ، ١٥   ٢ ٢ ، ٣   ٣ (١)

٤ ٩٠٠ متر مربع.   ٥ نق = ٧,٥ سم

٦ ٢٠ ، ٢٠، ٢٠ من السنتيمترات.

٧ ٥ √٢ سم، ٥ √٢ سم

٨ ٨٠٠٠٠ متر مربع   ٩ $\frac{\text{ع}}{\text{نق}}$ = ٢

١٠ $\frac{٤٤١٠٠}{\pi}$ متر مربع   ١١ ١٥ √٢ ، ١٥ √٢ سم

١٢ أبعاد العلبة ٣ ، ٩، ١٨ من السنتيمترات

١٤ (٤ ، ٤) ، (٤ ، -٤)   ١٥ $\frac{٦}{\sqrt{٥}}$ وحدة طول

١٦ ٩٠°   ١٧ ٢ √٢ أمبير

١٨ ٢٢٥٠   ١٩ س = $\frac{١٠}{٣}$ سم

حل التمارين العامة

١ جـ   ٢ ب   ٣ د   ٤ أ   ٥ د

٦ د متناقصة على]-∞، ٣[متزايدة على]٣ ، ∞[

٧ د متزايدة على]-∞، ٠[،]$\frac{١}{٢}$ ، ∞[

متناقصة على]٠ ، $\frac{١}{٢}$[

٨ د متزايدة على]-∞، ∞[

٩ د متزايدة على]-∞، ٢[متناقصة على]٢ ، ∞[

١٠ د متزايدة على]-∞، ٠[،]$\frac{٤}{٣}$ ، ∞[

متناقصة على]٠ ، $\frac{٤}{٣}$[

١١ د متناقصة على]-∞، ٣[متزايدة على]٣، ∞[

١٢ د متناقصة على]-∞، ٠[،]٠، ∞[

١٣ د(س)= $\frac{\text{س}}{\text{س}٢}$ د متزايدة على]-∞، -٢[،]-٢، ∞[

١٤ د متزايدة على]-∞، ١[،]١ ، ∞[

١٥ تحدب لأسفل لكل س ∈ ح

١٦ تحدب لأعلى على]-∞، ١[

ولأسفل على]١ ، ∞[،(١ ، -٢) نقطة انقلاب

١٧ تحدب لأعلى على]-∞، ٢[

لأسفل على]٢ ، ∞[(٢ ، -٧) نقطة إنقلاب

١٨ تحدب لأعلى على]-∞، ٠[،]٣ ، ∞[

تحدب لأسفل على]٠ ، ٣[

نقط الانقلاب: (٠ ، ٠) ، (٣ ، ٨١)

١٩ تحدب لأسفل على]-∞، ٠[،]٢، ∞[

ولأعلى على]٠ ، ٢[، نقط الأنقلاب: (٢، ٠)

٢٠ تحدب لأعلى على]-∞،٠[ولأسفل على]٠ ، ∞[

نقط الانقلاب: (٠، ٧)

٢١ د(-٣) = ١٣ قيمة عظمى محلية

٢٢ د(٠) = ٧ قيمة عظمى محلية

د(١) = ٦ قيمة صغرى محلية.   د(٠)

٢٣ د($\frac{٢}{٣}$) = $\frac{٣٢}{٢٧}$ قيمة عظمى محلية

د(٢) = ٠ قيمة صغرى محلية

٢٤ د(-٢) = -٨ قيمة صغرى محلية

د(٠) = ٨ قيمة عظمى محلية

د(٢) = -٨ قيمة صغرى محلية

٢٥ د(٠) = -١ قيمة صغري محلية.

٢٦ د غير متصلة عند س = ٢

د(١) = ٢ قيمة عظمى محلية

د(٣) = ٦ قيمة صغرى محلية

٢٧ د(-١) = -$\frac{١}{٢}$ قيمة صغرى محلية

د(٩) = $\frac{١}{١٨}$ قيمة عظمى محلية.

٢٨ د (٢) = ٠ قيمة صغرى محلية.

٢٩ -١,٦ قيمة صغرى محلية

٣٠ للدالة قيمة صغرى مطلقة = -٩

وقيمة عظمى مطلقة = ١٨

٣١ القيمة الصغرى المطلقة = ٠

القيمة العظمى المطلقة = ٨١

٣٢ القيمة الصغرى مطلقة = ٢

القيمة العظمى مطلقة = ١٨

٣٣ القيمة العظمى المطلقة = ٢

القيمة الصغرى المطلقة = $\frac{٧}{٨}$

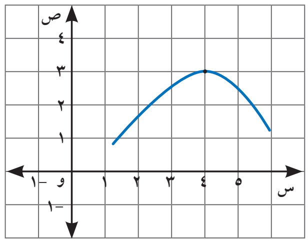
٣٤ قيمة عظمى مطلقة = ١٦ ،

قيمة صغرى مطلقة = -٦

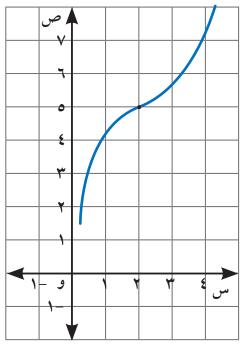
٣٥ ٣٦ قيمة عظمى مطلقة، -٤ قيمة صغرى مطلقة

٣٦ -٥٤ قيمة صغرى مطلقة ، ٣ قيمة عظمى مطلقة

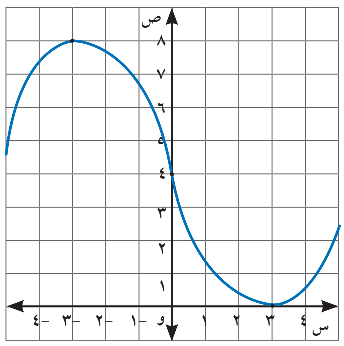
٣٧



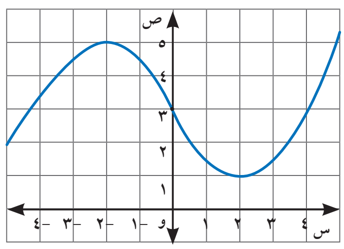
٣٨



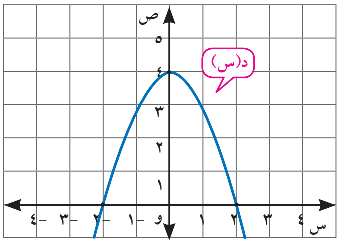
٣٩



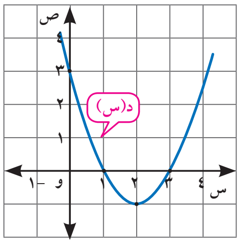
٤٠



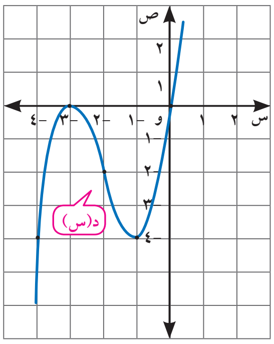
٤١



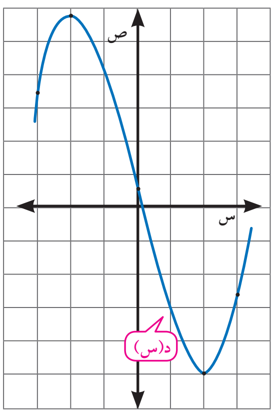
٤٢



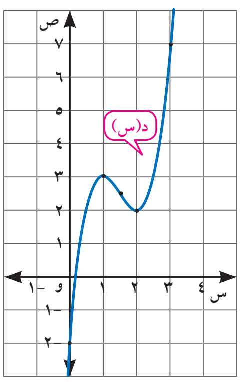
٤٣



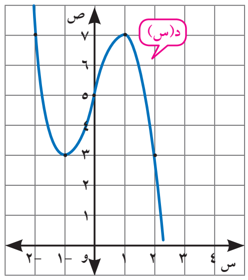
٤٤



٤٥



٤٦



٤٧ ∴ ء = ٦ ، جـ = ٠   ∴ أ = ٢ ، ب = -٣

٤٨ بعدى المستطيل هما ٥ متر ، ٥ متر

٤٩ ب ٢٨ وحدة مربعة

٥٠ ع = ٢٥٠ π $\sqrt{٣}$ سم^{٣}

٥١ ١٠ $\sqrt{٢}$ سم

٥٣ ٢ وحدة مربعة   ٥٤ $\frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{٢}$ مترًا

حل الاختبار التراكمى

١ أ]٢، ∞[ب س = ٢   جـ س = ٥

د]-∞ ، -١[،]٥، ∞[

٢ أ عند س = $\frac{-ب}{أ}$ توجد قيمة عظمى محلية

ب د متزايدة على]-∞ ، $\frac{٥}{٢}$[

متناقصة على]$\frac{٥}{٢}$ ، ∞[

٣ (-١، ٠) ، (٠، ١) ، (١، ٠) نقط حرجه

فترات التزايد :]-١، ٠[،]١، ∞[

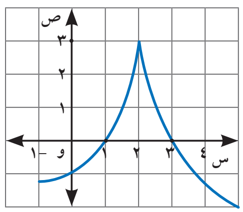
فترات التناقص :]-∞ ، -١[،]٠ ، ١[

٤ النقطة الحرجة : (٢، ٨)

تحدب لأعلى على]-∞، ٢[

تحدب لأسفل]٢، ∞[نقطة الانقلاب : (٢، ٨)

٥



٦ أ أ = -٣ ، ب = ٣

ب التحدب : لأعلى على]-∞، ١[

لأسفل على] ١ ، ∞[لاتوجد نقطة انقلاب

٧ (٢ ، ٣)   ٨ ($\frac{٧}{٤}$ ، ٠)

الوحدة الرابعة

تمارين ٤ - ١

١ ب   ٢ د   ٣ ب

٤ $\frac{١}{٣٠}$ (س - ٢)^{٥} (٥س + ٢) + ث

٥ $\frac{١}{٣٠}$ (س - ٢)^{٤} [٥س^{٢} + ٤س + ٢] + ث

٦ $\frac{١}{٨٤}$ (س^{٢} - ١)^{٦} (٦س^{٢} + ١) + ث

٧ $\frac{٢}{١٥}$ (س + ٤)$^{\frac{٣}{٢}}$ (٣س - ٨) + ث

٨ $\frac{٢}{٣٥}$ (س + ١)$^{\frac{٥}{٢}}$ (٥س - ٩) + ث

٩ $\frac{١}{٧٠}$ (س^{٢} + ٣)^{٥} (٥س^{٤} - ٥س^{٢} + ٣) + ث

١٠ $\frac{١}{٦}$ لو$_{هـ}$ (٣س^{٢} + ٢) + ث

١١ س - لو$_{هـ}$ |س + ١| + ث

١٢ $\frac{٢}{٣}$ (س + ٥) $\sqrt{س - ١}$ + ث

١٣ $\frac{١}{١٥}$ (٣س^{٢} + ٢س + ٢) $\sqrt{٢س - ١}$ + ث

١٤ - $\frac{١}{٢}$ هـ$^{-س^{٢}}$ + ث

١٥ - لو$_{هـ}$ | هـ$^{-س}$ + س | + ث

١٦ $\frac{١}{٢}$(لو$_{هـ}$ ٥س)^{٢} + ث

١٧ $\frac{١}{٤}$(لو$_{هـ}$ س)^{٤} + ث

١٨ لو$_{هـ}$ | لو$_{هـ}$ س | ث

١٩ (٢س - ١) هـ^{٢س} + ث

٢٠ $\frac{١}{٢}$ (س^{٢} - ١) هـ$^{س^{٢}}$ + ث

٢١ - $\frac{٢س + ١}{٤هـ^{٢س}}$ + ث

٢٢ $\frac{١}{١٦}$س^{٤} (٤ لو$_{هـ}$ س - ١) + ث

٢٣ س (لو$_{هـ}$ س^{٢} - ٢) + ث

٢٤ ت = س [(لو$_{هـ}$ س)^{٢} - ٢ لو$_{هـ}$ س + ٢] + ث

٢٥ - $\frac{١}{س}$(١ + لو$_{هـ}$ س) + ث

٢٦ $\frac{هـ^{٢س}}{٤}$ [٢س^{٢} + ٢س + ١] + ث

(٢٧) $\frac{١}{٤}$ س^{٢} [٢(لو$_{هـ}$ س)^{٢} - ٢ لو$_{هـ}$ س + ١] + ث

(٢٨) ص = لو$_{هـ}$ |س - ٣| + ٣

(٢٩) ص = $\frac{٢}{١٥}$ (س + ١)$^{\frac{٣}{٢}}$ (٣س - ٢) + ١

(٣٠) ص = س^{٣} - ٣س + ٢

د(-١) = ٤ قيمة عظمى محلية

تمارين ٤ - ٢

(١) د (٢) أ (٣) ب (٤) ب

(٥) $\sqrt{٣}$ جا س + ث

(٦) - $\frac{١}{٢}$ ظتا (٢ س + ٣) + ث

(٧) - جتا س + ث (٨) - $\frac{١}{٤}$ جتا ٢ س + ث

(٩) س + ث

(١٠) س + $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س + ث

(١١) - $\frac{١}{٤}$ جتا^{٤} س + ث (١٢) $\frac{١}{٦}$ جا^{٦} س + ث

(١٣) $\frac{١}{٣}$ جا (س^{٣} + ٥) + ث

(١٤) $\frac{١}{٦}$ (٣ + جا س)^{٦} + ث

(١٥) $\frac{١}{٥}$ قا^{٥} س + ث (١٦) جا س - ٤ ظا س + ث

(١٧) $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{١}{٤}$ جا ٢ س + جا س + ث

(١٨) $\frac{٥}{٢}$ س + $\frac{١}{٤}$ جا ٢ س + ظا س + ث

(١٩) ظا س - $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س + ث

(٢٠) ٢ ص = ٩ + ١٤ س + جتا ٢ س

(٢١) ص = س^{٢} + ٨ + ظا $\frac{س}{٢}$

(٢٢) ص = ٢ ظتا س + ٣

تمارين ٤ - ٣

(١) جـ (٢) د (٣) ٢٠ (٤) ٢٢

(٥) ١٦ (٦) ٤ (١ - $\sqrt{٢}$)

(٧) $\frac{١٤}{٣}$ (٨) ≃ ٤,٤٣

(٩) ٣ (١٠) - $\frac{١}{٥}$ (٤)^{٤}

(١١) $\frac{١١٢}{٥}$ (١٢) $\frac{٤}{\pi}$

(١٣) $\frac{١}{٢}$ (١٤) ١٦ - ٧هـ^{٣}

(١٥) أ ٨ ب ١٢ جـ ٦

(١٦) أ ١١ ب صفر جـ ٦

(١٧) ٢٠

تمارين ٤ - ٤

(١) ٥$\frac{١}{٤}$ وحدة مربعة (٢) ٣ وحدة مربعة

(٣) ٢ لو$_{هـ}$ ٣ وحدة مربعة (٤) ٦ وحدة مربعة

(٥) $\frac{٩}{٢}$ وحدة مربعة (٦) $\frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة

(٧) جـ (٨) د (٩) جـ (١٠) ب

(١١) ١٢ وحدة مربعة (١٢) ٧ وحدة مربعة

(١٣) $\frac{٣٨}{٣}$ وحدة مربعة (١٤) ١٠ $\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة

(١٥) ٣ وحدة مربعة (١٦) ٢,٢٥ وحدة مربعة

(١٧) ٢,٥ وحدة مربعة (١٨) ٩ وحدات مربعة

(٢٠) ٢٢ وحدة مربعة

تمارين ٤ - ٥

(١) د (٢) ب (٣) ب (٤) جـ

(٥) ٩ π وحدة مكعبة (٦) ٩ π وحدة مكعبة

(٧) $\frac{٣}{٤}$ وحدة مكعبة (٨) ٢٤ π وحدة مكعبة

(٩) $\frac{\pi}{٣}$ وحدة مكعبة (١٠) ٣٢π وحدة مكعبة

(١١) ٨ وحدة مكعبة (١٢) $\frac{٩٦}{٥}$ وحدة مكعبة

(١٣) ٣٦ π وحدة مكعبة

(١٤) أولًا: ٨π وحدة مكعبة

ثانيًا: $\frac{٥١٢}{١٥}$ π وحدة مكعبة

(١٥) ٩ π وحدة مكعبة (١٦) ٥٠π وحدة مكعبة

التمارين العامة

(١) جـ (٢) د (٣) أ (٤) أ

(٥) جـ (٦) ٦س ءس

(٧) ٥ (٢س + ٣)$^{\frac{٣}{٢}}$ ءس

(٨) ٣ (س + $\frac{١}{س}$)^{٣} (١ - $\frac{١}{س}$) ءس

(٩) - ٥ هـ$^{-٥س}$ ء س

(١٠) (٢س + ٣) هـ$^{س^{٢} + ٣س}$ ء س

(١٢) $\frac{٢س}{س^{٢} + ١}$ ء س (١٣) $\frac{-٢}{س}$ لو$_{هـ}$ $\frac{١٠}{س}$ ء س

١٤ $-٣\ \text{ظا}\ (٣\text{س} - ١)\ \text{قتا}^{٢}\ (٣\text{س} - ١)\ \text{ء س}$

١٥ $\int_{-٢}^{٥} \text{س}^{٢}\ \text{ءس}$ ١٦ $\int_{-٤}^{٤} \sqrt{\text{س} + ٦}\ \text{ءس}$

١٧ $\int_{٣}^{٦} \text{ك ءس}$ ١٨ $\int_{-٤}^{٥} \text{س}^{٢}\ \text{ءس}$

١٩ أ ١٥ ب ٦ جـ ٩ د ١٥

٢٠ $\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٤$ ٢١ $\frac{٢٢٧}{١٢}$

٢٢ $-\frac{٧}{٣}$ ٢٣ $\frac{٢٣}{٣}$ ٢٤ $\frac{٤٦}{٥}$ ٢٥ ٨π

٢٦ π ٢٧ $\frac{١}{٢٠}(\text{س} - ٥)^{٤}\ (٤\text{س} + ٥) + \text{ث}$

٢٨ $-\frac{١}{(١ + \sqrt{\text{س}})^{٢}} + \text{ث}$ ٢٩ $\frac{١}{٢}\ \text{ظا}\ (\text{س}^{٢} + ٢) + \text{ث}$

٣٠ $\frac{١}{٤}\ \text{قا}^{٤}\text{س} + \text{ث}$ ٣١ $\frac{١}{٢}\ \text{هـ}^{\text{س}^{٢} + ٣} + \text{ث}$

٣٢ $\frac{١}{٢}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ (\text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{س}^{٢}) + \text{ث}$

٣٣ $\frac{٣}{٥}(\text{س} - ١)\ (٢\text{س} + ٣)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

٣٤ $\frac{١}{٢٥}\ \text{س}^{٥}\ [\ ٥\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{س} - ١] + \text{ث}$

٣٥ $\text{هـ}^{٢\text{س}}\ [\ ٢\text{س} - ١] + \text{ث}$

٣٦ $\frac{٦٤}{٣}$ وحدة مربعة ٣٧ $\frac{٤٦}{٣}$ وحدة مربعة

٣٨ $\frac{٢٢}{٣}$ وحدة مربعة

٣٩ أ $\frac{٢}{٣}\ \pi$ وحدة مربعة

ب $٢\pi\ [٢ + \text{لو}_{\text{هـ}}\ ٣]$ وحدة مكعبة

٤٠ $\frac{٤\pi}{٣}$ وحدة مكعبة

الاختبار التراكمى

١ ب ٢ جـ ٣ ب ٤ جـ

٥ د ٦ د

٧ أ $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٦\text{س}} + \text{ث}$

ب $\frac{٢}{٣٥}\ (\ ٥\text{س}^{٢} + ١٢\ \text{س} + ٢٤\ )\ (\text{س} - ٣)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

٨ ١٠٦

٩ أ $\frac{١}{٣}\ \text{قا}^{٣}\ \text{س} + \text{ث}$ ب $\frac{٢}{٣}\sqrt{(١ + \text{جاس})^{٣}} + \text{ث}$

١٠ أ $\frac{١}{٣}\ \text{س}^{٣}[\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{س}^{٢} - \frac{٢}{٣}\ ] + \text{ث}$

ب $\frac{١}{٤}\ \text{هـ}^{٢\text{س}^{٢} - ١} + \text{ث}$

١١ أ صفر ب صفر

١٢ -١٣ ١٣ ٤ وحدة مربعة

١٤ أ $\frac{٤}{٣}$ وحدة مربعة ب $٢,٤\ \pi$ وحدة مكعبة

إجابات الاختبارات

الاختبار الأول

١

١	٢	٣	٤	٥	٦
جـ	ب	ب	ب	د	جـ

٢ أ $\frac{-١}{٤}\ \text{جتا}^{٤}\ \text{س} + \text{ث}$ ب $\frac{١}{٣}$

٣ أ $١٤\ \text{س} + ٥\text{ص} - ٦ = ٠$

ب ٢سم/د ، ٦ دقيقة

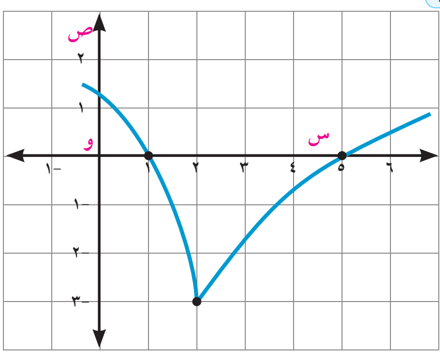
٤ أ د متناقصة على $]\ \frac{٢\pi}{٣}، \frac{٤\pi}{٣}\ [$

د متزايدة على $]\ ٠، \frac{٢\pi}{٣}\ [\ ، \ ]\ \frac{٤\pi}{٣}\ ،\ ٢\pi\ [$

ب ٦٤ وحدة مربعة

٥ أ $\frac{٢٧}{٥}$ وحدة مكعبة

ب



الاختبار الثانى

١

١	٢	٣	٤	٥	٦
ب	جـ	ب	أ	جـ	جـ

٢ أ $\frac{١}{٨٠}\ (\ ٢\text{س} - ١\ )^{٤}\ (٨\text{س} + ١\ ) + \text{ث}$

ب $-\frac{١}{٤}\ \text{هـ}^{-٢\text{س}}\ [\ ٢\text{س} + ١\ ]$

٣ أ $\text{ص}' = \frac{\text{ص جا س - جتا ص}}{\text{جتا س - س جا ص}}$

ب صغرى مطلقة = ٥ ، عظمى مطلقة = ١٣

٤ أ د (- ١) = - ١ قيمة صغرى محلية

د(١) = ١ قيمة عظمى محلية $-\frac{٢}{٣}$

ب ٣٦ سم^{٢}/د

٥ أ ٩ وحدات مربعة ب أ = -٦ ، ب = ٩

الاختبار الثالث

١

١	٢	٣	٤	٥	٦
ب	ب	د	جـ	أ	أ

٢ أ س $(١ + لو_{هـ} س^{٢})$

ب المنحنى محدب لأعلى على] - ∞ ، ٤[

]٤ ، ∞ [ولاتوجد نقط انقلاب

٣ أ $\frac{١}{٢٠}$ (٤س + ٥) $(س - ٥)^{٤}$ + ث

(٢س - ١) $هـ^{٢س}$ + ث

ب قيمة عظمى مطلقة = ٠ ،

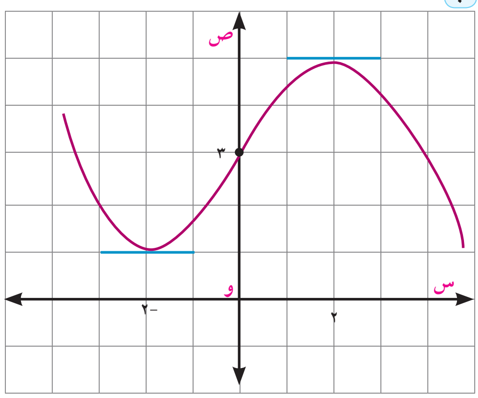
قيمة صغرى مطلقة = -٢٧

٤ أ ع = $\frac{١}{٧}$ وحدة طول

ب ل $\sqrt{٣}$ $سم^{٢}$ / د

٥ أ $\frac{٩}{٢}$ وحدة مربعة

ب



الاختبار الرابع

١

١	٢	٣	٤	٥	٦
ب	ب	جـ	د	جـ	جـ

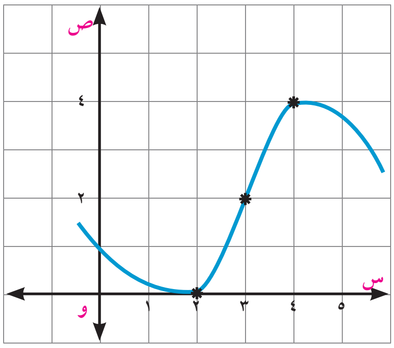
٢ أ $س^{٣}$ - ٢ $هـ^{٢س}$ + ث

$\frac{٢}{٣}$ (س - ٣) $\sqrt{س + ٣}$ + ث

٣ أ -١١ ب د(س) = ٣$س^{٢}$ - $س^{٣}$

٤ أ $\frac{١}{٦}$ وحدة مربعة

ب



٥ ب ٧,٦π $سم^{٢}$/ث

الاختبار الخامس

١ أ س ∈]-∞ ، ٠[، س ∈] ٢ ، ∞[

ب س ∈ {٠ ، ٢} جـ] ١ ، ∞[

د س = ٠ هـ د(١) = ٢

و ٤ وحدات مربعة

٢ أ - ٢ ظتا $\frac{س + ٥}{٢}$ + ث $\frac{٥}{٦}$ $لو_{هـ}$ |٣$س^{٢}$ - ١| + ث

ب د متناقصة على] ١ ، ٣[،

متزايدة على] - ∞ ، ١[،]٣، ∞ [

جـ (-١) قيمة صغرى مطلقة ، (٣) قيمة عظمى مطلقة

٣ أ س - ٦ص + ١٨ - $\frac{\pi}{٤}$ = ٠ ب ٢ دقيقة

٤ أ $هـ^{-٢}$ ب ٣٠ سم ، ٦٠ سم

٥ أ $\frac{٢٥٦}{١٥}$ π وحدة مكعبة

ب أ = -٣ ، ب = ٠

الاختبار السادس:

١

١	٢	٣	٤	٥	٦
ب	أ	أ	ب	أ	ب

٢ أ - $\frac{٧}{٢٠}$ $لو_{هـ}$ |٢ - ٥$س^{٤}$| + ث

، - $\frac{٣}{٥}$ $هـ^{-٥س}$ + π $لو_{هـ}$ |س| + ث

٣ أ = - $\frac{١}{٣}$ $قتا^{٣}$ س + ث ب ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$)

④ أ قيمة عظمى مطلقة = ٠
وقيمة صغرى مطلقة = - ٥
ب ب = -١٢

⑤ أ $\frac{٣}{٢٠}$
ب $\frac{٥}{٢}$ وحدة مربعة ، ٤ π وحدة مكعبة

الاختبار السابع :

①

١	٢	٣	٤	٥	٦
ب	أ	أ	ب	أ	ب

② أ - س جتا س + جا س + ث ، $\frac{٢}{٣}$(٢ $\sqrt{٢}$ - ١)
ب ص = س - $\frac{\pi}{٤}$

③ أ المنحنى محدب لاسفل لكل س∈ ع
ولاتوجد نقط انقلاب
ب ٦سم^{٣}/ث

④ أ $\frac{١١٦}{١٥}$ ب ع = $\frac{٢٠٠}{\pi}$ مترًا

⑤ أ **أولاً:** القيمة العظمى المطلقة = ٥
القيمة الصغرى المطلقة = ١
ثانيًا: ٤ وحدات مربعة
ب ٢ π وحدة مكعبة

الاختبار الثامن

① أ - $\frac{٣}{٢}$ ب ٧ قا س ظا س هـ$^{\text{قاس}}$
ج (٠، ٠) د $\int_{٢}^{٤}$ د(س) د س
هـ $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة و $\frac{١}{٢}$

② أ $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + $\frac{٩}{٢}$ س^{٢} + ٢٧ + ث
- هـ$^{-س}$ [س^{٢} + ٢س + ٢] + ث
ب ١٢ س - ص + ٢ - ٣ π = ٠

③ أ $\frac{١٣}{٣}$

④ أ القيمة العظمى المطلقة = ٦
والقيمة الصغرى المطلقة = ١
ب - $\frac{٣}{٤}$ م/د

⑤ أ $\frac{\pi}{٣}$ ب **اولاً:** ١٣ وحدة مربعة
ثانيًا: ٥٧ π وحدة مكعبة

الاختبار التاسع:

①

١	٢	٣	٤	٥	٦
أ	د	أ	ب	جـ	جـ

② أ $\frac{٣}{٢}$ لو$_{هـ}$ |س^{٢} - ١ |+ث
هـ^{٣س} [٣س^{٢} - ٢س + $\frac{٢}{٣}$] + ث
ب ١٨° ٢٦′

③ ب ص = ٤س + ٥

④ أ = $\frac{٧ء}{١٠٠}$/د
ب د(- ١) = ٨ قيمة عظمى محلية
، د(١) = ٤ قيمة صغرى محلية
، (٠، ٦) نقطة إنقلاب

⑤ أ ص = $\frac{١}{٣}$ س + ٢ ب (٣، ٣)
جـ ص = س د $\frac{٤٥}{٢}$ π وحدة مكعبة

الاختبار العاشر :

① أ هـ ب ٦ قتا^{٢} س (٥ - ٢ ظتا س)^{٢}
جـ ٣ د - ١٦ هـ صفر و $\frac{١٦}{١٥}$

② أ - $\frac{١}{٣}$ لو$_{هـ}$ |جتا (٣ س + ١)| + ث
$\frac{١}{١٨}$ (٣س - س^{٣})^{٥} + ث
ب **أولاً:** ٢ س - ٣ص - ٧ = ٠ **ثانيًا:** $\frac{١}{٩}$

③ أ تحدب لأعلى على] ٠، ٠ [
تحدب لأسفل على] -∞، ٠ [،] ١، ∞ [
(٠، ١) نقطة إنقلاب
ب ب = - ٤٨

④ أ $\frac{٣٢}{٣}$ وحدات مربعة ب $\frac{٥}{٢}$ سم/ث

⑤ أ **أولاً:** ص = $\frac{١}{١٢}$ (س + ١) + ٩
ثانيًا: ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$) نقطة انقلاب
ب $\frac{٢٣}{١٤}$ π وحدة مكعبة